Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 21.10.2011

Abgabe: 28.10.2011
vor Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis III

Blatt 01

Aufgabe 1: Klassifikation von Differentialgleichungen

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen nach den in Definition 1.1 vorgestellten Klassifizierungsmerkmalen:

(a) $x'(t) = t - \frac{1}{2}x(t)^2$

(b) $x'''(t)x''(t) - 2x(t)x'(t) = 0$

(c) $x'(t) - 2x(t) + 5t = 1$

Aufgabe 2: Elektrischer Schwingkreis

Zeigen Sie, dass die Funktion $U(t) = U_0 e^{-t}[\cos(t) + \sin(t)]$ folgendes Anfangswertproblem löst:

$$U(t) + U'(t) + \frac{1}{2}U''(t) = 0 \quad , \quad U(0) = U_0 \quad , \quad U'(0) = 0$$

Aufgabe 3: DGL I

(a) Gegeben sei die Menge von reellen Funktionen $A := \{x \mapsto Cx^2 \mid C \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösungsmenge gerade durch A gegeben ist. Welche Rolle spielt dabei die Konstante $C \in \mathbb{R}$?

(b) Gegeben sei die Menge von reellen Funktionen $B := \{x \mapsto \tan(x+C) \mid C \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösungsmenge gerade durch B gegeben ist.

Aufgabe 4: DGL II

(a) Beweisen Sie die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung $u \in C^1([-1, 1])$ des Anfangswertproblems $\frac{u'(t)}{u(t)^2} = t,\ u(0) = 1$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = (x + y(x))^2,\ y(0) = 0$, indem Sie es durch eine geeignete Transformation in die Form mit getrennten Variablen überführen und dann Aufgabe 3 verwenden.

Aufgabe 5: Erstes Integral

Eine nicht-konstante Funktion $E : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* der Differentialgleichung $y'(t) = f(y(t))$, wenn $t \mapsto E(y(t))$ konstant ist für jede Lösung der Differentialgleichung.

(a) Zeigen Sie, dass $E(x) = x_1^2 + x_2^2$ ein erstes Integral von $x_1' = x_2,\ x_2' = -x_1$ ist.

(b) Bestimmen Sie ein erstes Integral zur Differentialgleichung
$\cos(t)u'(t) - \sin(t)u(t) = \tan(t)^2 + 1$.