Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 04.11.2011

Abgabe: 11.11.2011
vor Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis III

Blatt 03

Aufgabe 1: DGL auf unbeschränkten Intervallen

Zeigen Sie: Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $F \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und für jedes Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ sei $(t, x) \mapsto F(t, x)$ Lipschitz-stetig in x gleichmäßig in t auf I mit einer Lipschitz-Konstanten $L(I)$. Dann hat das AWP $x'(t) = F(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ eine eindeutige globale Lösung $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 2: Picard-Lindelöf

Überprüfen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der folgenden DGLs. Ziehen Sie desweiteren Ihre Kenntnisse aus Aufgabe 1 heran, um die Existenz globaler Lösungen zu diskutieren.

(a) $x'(t) = 2t\big(1 + x(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$

(b) $x'(t) = \sqrt{1 + t^2 x(t)^2}$, $t \in \mathbb{R}$

(c) $\big(x'(t), y'(t)\big) = \big(\sin(t)y(t), \cos(t^2)x(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3: stetige Abhängigkeit von Parametern

(a) Beweisen Sie die vereinfachte Version des *Lemmas von Gronwall*:
Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ und die stetige Funktion $\Phi : [t_0, t_0 + h] \longrightarrow [0, \infty)$ genüge der Integralungleichung $\Phi(t) \leq A \int_{t_0}^{t} \big(\Phi(s) + \varepsilon\big) ds$ für alle $t \in [t_0, t_0 + h]$ mit reellen Konstanten $A > 0$ und $\varepsilon \geq 0$. Dann gilt für alle $t \in [t_0, t_0 + h]$ die Abschätzung $0 \leq \Phi(t) \leq \varepsilon\big(e^{A(t-t_0)} - 1\big)$.

[Tipp: Zeigen Sie die Abschätzung $\Phi(t) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}(t - t_0)^k$, indem Sie die Integralungleichung zunächst geeignet abschätzen und dann per vollständiger Induktion schließen]

(b) Wir betrachten das parameterabhängige AWP $x'(t) = F\big(t, x(t), \lambda\big)$, $x(t_0) = \eta$, wobei $F : R \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf $R \times \Lambda$ beschränkte stetige Funktion ist, die bezüglich der zweiten Variable eine Lipschitz-Bedingung aufweist. Dabei ist $R := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [t_0, t_0 + h], |x - \eta| \leq b\}$ das durch h und b gegebene Rechteck und $\Lambda \subset \mathbb{R}$ ein gegebener Parameterbereich. Sei nun x eine Lösung des AWP zum Parametersatz (λ_1, η_1) und y eine Lösung zu (λ_2, η_2). Leiten Sie eine Formel her, welche die stetige Abhängigkeit der Lösung des AWP von den Parametern beschreibt [Tipp: Schätzen Sie die Differenz $|x(t) - y(t) - \eta_1 + \eta_2|$ geeignet ab und schließen mit der Aussage aus (a)].

bitte wenden!

Aufgabe 4: DGL-Systeme

(a) Gegeben seien $\lambda, c \in \mathbb{C}$ und das AWP $x' = \lambda x\ ,\ x(0) = c$. Zeigen Sie, dass $x(t) = ce^{\lambda t}$ dieses AWP löst.

(b) Es sei nun $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine gegebene Diagonalmatrix. Lösen Sie das DGL-System $x' = Ax\ ,\ x(0) = c \in \mathbb{C}^n$.

(c) Sei $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar, $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix und $A := U^{-1}\Lambda U$. Lösen Sie das DGL-System $x' = Ax\ ,\ x(0) = c \in \mathbb{C}^n$.

(d) Lösen Sie nun das folgende Anfangswertproblem:

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0\ ,\ x(0) = 0\ ,\ x'(0) = 1$$