Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 11.11.2011

Abgabe: 18.11.2011
vor Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis III

Blatt 04

Aufgabe 1: DGL mit Nebenbedingungen

(a) Im Folgenden betrachten wir die Differentialgleichung

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Bestimmen Sie unter Verwendung von Aufgabe 4 von Blatt 3 die Lösung dieser Gleichung, welche zusätzlich folgende Nebenbedingungen erfüllt:

(i) $x_1(\pi) = 2$ und $x_2(0) = 5$

(ii) $\int_0^{\pi/2} x_1(t)dt = 2$ und $\int_{\pi/2}^{\pi} x_1(t)dt = -3$

(b) Sei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, seien $f, g, h \in C([a, b], \mathbb{R})$. Sei $L \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ die Menge aller Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$$

und sei $y_1, y_2 \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung. Zeigen Sie, dass es unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$y_1(a)y_2(b) - y_1(b)y_2(a) \neq 0$$

höchstens ein $y \in L$ mit $y(a) = c$ und $y(b) = d$ geben kann.

Aufgabe 2: Fundamentalmatrizen

Für ein gegebenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ betrachten wir neben dem ursprünglichen DGL-System $y' = F(x)y$ für Vektorfunktionen $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^k$ und $F : J \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k}$ nun auch die DGL $Y' = F(x)Y$ für matrixwertige Funktionen $Y : J \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k}$. Ist Z eine Lösung der matrixwertigen Gleichung, so bilden die Spaltenfunktionen $z_1, \ldots, z_k$ genau dann ein Fundamentalsystem der vektorwertigen Gleichung, wenn $Z(a)$ für ein $a \in J$ invertierbar ist. In diesem Fall ist $Z(a)$ sogar für jedes $a \in J$ invertierbar. Eine solche Lösung Z nennen wir *Fundamentalmatrix*.

(a) Zeigen Sie: Ist Y eine Fundamentalmatrix, dann ist eine weitere Abbildung $Z : J \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k}$ genau dann eine Lösung der matrixwertigen Gleichung, wenn $Z(x) = Y(x)C$ für alle $x \in J$ mit $C = Y(a)^{-1}Z(a)$ für ein beliebiges $a \in J$ gilt.

(b) Beweisen Sie die *Formel von Liouville*: Sei Z eine Lösung der matrixwertigen Gleichung und $w(x) := \det Z(x)$ die zugehörige Wronski-Determinante, dann ist w differenzierbar und es gilt $w'(x) = \big(\mathrm{spur} F(x)\big)w(x)$ für alle $x \in J$.
$\big[$Tipp: transformieren Sie die DGL für Z mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformation $B(x) := Z(x)^{-1}F(x)Z(x)$ und verwenden dies schließlich für $w'(x) = \sum_{\kappa=1}^{k} \det\big(z_1(x), \ldots, z'_\kappa(x), \ldots, z_k(x)\big)\big]$

bitte wenden!

Aufgabe 3: Störung einer DGL

Bestimmen Sie die Lösung des AWP

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \ , \ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

indem Sie zunächst die Lösung x_λ des um einen Parameter $\lambda > 0$ gestörten AWP

$$x_\lambda' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2+\lambda \end{pmatrix} x_\lambda \ , \ x_\lambda(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bestimmen und dann den Grenzübergang $\lambda \to 0$ durchführen. Warum gilt $x_\lambda \to x$ für $\lambda \to 0$? [Tipp: Aufgabe 4 und Aufgabe 3b von Blatt 3]