Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 18.11.2011

Abgabe: 25.11.2011
vor Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis III

Blatt 05

Aufgabe 1: Potenzreihenansatz

Wir betrachten die homogene lineare DGL 2.Ordnung

$$\eta'' - \frac{x+5}{x}\eta' + \frac{3}{x}\eta = 0 \ , \ \ x > 0.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem dieser DGL, indem Sie für η_1 den Potenzreihenansatz $\eta_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ wählen und mit der DGL Bedingungen an die Koeffizienten herleiten. Da wir eine homogene DGL betrachten, ist dann auch $C\eta_1$ mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Wählen Sie η_1 so, dass $a_0 = 60$ gilt. Zur Bestimmung von η_2 benutzen Sie zuerst Aufgabe 2b von Blatt 4, bevor Sie mit einem danach ersichtlichen, geeigneten Ansatz weiterrechnen.

Aufgabe 2: Jordansche Normalform

Auf der Homepage finden Sie die pdf-Datei "Jordan-Algorithmus" zum Download. Darin wird beschrieben, wie man eine Matrix A prinzipiell zerlegt, um zugehörige Hauptvektoren und somit die Jordansche Normalform zu berechnen. Wenden Sie diesen Algorithmus stur an, um damit jeweils ein Fundamentalsystem zu folgenden homogenen DGL-Systemen $x' = Ax$ zu bestimmen:

(a)

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x$$

(b)

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

(Hinweis: wenden Sie den Algorithmus trotzdem an, obwohl die Matrix bereits in Jordanscher Normalform ist. Versuchen Sie an diesem Beispiel zu verstehen, wie der Algorithmus funktioniert. Schlagen Sie hierfür in der Literatur ggf. nach, wie ein Hauptvektor definiert ist)

bitte wenden!

Aufgabe 3: reelle Normalformen

Wir betrachten im Folgenden für eine natürliche Zahl k das durch eine reelle $k \times k$-Matrix A gegebene DGL-System $y' = Ay$ und beschränken uns auf den Spezialfall $k = 2$. Durch die Transformation $y = Sz$ mit einer geeigneten invertierbaren Matrix S können wir dieses DGL-System auf gewisse *reelle Normalformen* zurückführen. Dies bewirkt den Übergang zum DGL-System $z' = Bz$ mit $B := S^{-1}AS$. Dabei spielen die Eigenwerte der Matrix A eine wichtige Rolle. Im zweidimensionalen gibt es entweder zwei verschiedene reelle Eigenwerte, einen reellen doppelten Eigenwert oder zwei zueinander komplex konjugierte Eigenwerte. Zeigen Sie für die folgenden Fälle, dass jeweils eine invertierbare Matrix S existiert, sodass die daraus resultierenden Normalformen B folgende Gestalt haben:

(a) A habe zwei konjugiert komplexe Eigenwerte $\mu = \alpha + i\beta$ und $\overline{\mu} = \alpha - i\beta$ mit $\beta > 0$ und B soll von folgender Form sein:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

(b) A habe einen doppelten reellen Eigenwert μ und sei nicht diagonalisierbar und B soll von folgender Form sein:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \mu & \mu \end{pmatrix}$$

(c) A habe zwei verschiedene reelle Eigenwerte μ und ν und B soll Diagonalgestalt haben.