Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 25.11.2011

Abgabe: 02.12.2011
vor Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis III

Blatt 06

Aufgabe 1: Phasenportrait einer DGL

Wir betrachten die lineare DGL zweiter Ordnung $x''+2\varrho x'+\omega^2 x = 0$, die sogenannte Schwingungsgleichung des harmonischen Oszillators, für eine Funktion $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Transformieren Sie die DGL zunächst in ein DGL-System $z' = Az$ erster Ordnung und berechnen dann die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ der auftauchenden Koeffizientenmatrix A. Bringen Sie die Matrix A für die Fälle

(a) $\varrho = 0\ ,\ \omega > 0$ **(b)** $0 < \omega < \varrho$ **(c)** $0 < \omega = \varrho$ **(d)** $0 < \varrho < \omega$

jeweils in die entsprechende reelle Normalform B aus Aufgabe 3 von Blatt 5. Im Folgenden betrachten wir dann nur noch das System $z' = Bz$. Geben Sie für alle vier Fälle jeweils die allgemeine Lösung dieses Systems an und leiten Sie einen Zusammenhang der beiden Komponenten z_1, z_2 her, also etwa $z_1(t) = f\big(z_2(t)\big)$ oder $z_2(t) = g\big(z_1(t)\big)$. Veranschaulichen Sie diesen Zusammenhang, indem Sie die Graphen dieser Abhängigkeiten, d.h. die Trajektorien in ein kartesisches Koordinatensystem eintragen und den Durchlaufsinn dieser Trajektorien durch Pfeile kennzeichnen (fertigen Sie für jeden Aufgabenteil eine eigenständige Skizze an). Die Gesamtheit der Trajektorien nennt man auch *Phasenportrait*. Was für Trajektorien entstehen in den verschiedenen Fällen? Was bedeutet das für die jeweilige Lösung?
(Tipp: im Falle zweier konjugiert komplexen Eigenwerte lösen Sie das System $z' = Bz$ am einfachsten, indem Sie mit $w := z_1 + iz_2$ und $a := \alpha + i\beta$ die äquivalente komplexe DGL $w' = aw$ lösen und über die Aufspaltung der Lösung w in Real- und Imaginärteil wieder zu z zurückkehren)

Aufgabe 2: Phasenfluß einer DGL

Beweisen Sie Lemma 8.6 und Korollar 8.7 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3: Polygonzug-Verfahren

Zu Beginn von Kapitel 7 wurde das sogenannte Euler-Cauchy-Polygonzugverfahren zur Bestimmung einer Lösung der DGL $x' = F(t,x)$ vorgestellt. Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Lösung von

(a) $x' = ax\ ,\ x(t_0) = x_0\ ,\ a \neq 0$

(b) $x' = Ax\ ,\ x(t_0) = x_0\ ,\ A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ diagonalisierbar

an der Stelle $T > t_0$ mit Hilfe des Polygonzugverfahrens und zeigen Sie jeweils, dass dieser Näherungswert bei einer immer feiner gewählten äquidistanten Zerlegung von $[t_0, T]$ (etwa $h_n = \frac{T-t_0}{n}$) gegen den tatsächlichen Wert $x(T)$ der Lösung x an der Stelle T konvergiert.

bitte wenden!

Aufgabe 4:

Wir betrachten eine explizite homogene lineare DGL k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$:

$$x^{(k)} + a_1 x^{(k-1)} + a_2 x^{(k-2)} + \ldots + a_{k-1} x' + a_k x = 0$$

Transformieren Sie diese DGL in ein System $z' = Az$ und zeigen Sie, dass gilt:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \lambda + a_k$$

Welche Konsequenz hat dies für die Bestimmung eines Fundamentalsystems für DGLs von solch einem Typ?