Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 02.12.2011

Abgabe: 09.12.2011
vor Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis III

Blatt 07

Aufgabe 1: Variation der Konstanten II

Bestimmen Sie ein $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, das für alle $t \in \mathbb{R}$ folgendes AWP löst:

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Exakte DGLs

Für zwei in einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ stetige Funktionen $\varphi, \psi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir im Folgenden DGLs vom Typ $\varphi\big(t, u(t)\big) + \psi\big(t, u(t)\big)u'(t) = 0$. Eine DGL dieser Form wird als *exakt* bezeichnet, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $F : G \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \quad , \quad \psi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \quad \text{für} \quad (x, y) \in G$$

gilt. Da man in so einer Situation

$$\frac{d}{dt} F\big(t, u(t)\big) = \varphi\big(t, u(t)\big) + \psi\big(t, u(t)\big)u'(t)$$

notieren kann, ist klar, dass man Lösungen der DGL durch Auflösen einer Gleichung $F\big(t, u(t)\big) = \mathit{const.}$ gewinnen wird. Leider sieht man einer gegebenen DGL nicht so leicht an, ob sie exakt ist. Sind die Funktionen φ und ψ jedoch stetig differenzierbar, so ergibt sich aus dem Satz von Schwarz ein notwendiges Kriterium, die sogenannte Integrabilitätsbedingung $\varphi_y(x, y) = \psi_x(x, y)$ für $(x, y) \in G$. Unter bestimmten Voraussetzungen an G ist diese Bedingung sogar hinreichend für die Exaktheit (vgl. AII "exakte 1-Formen").

Bestimmen Sie eine Lösung des AWP

$$-tu'(t) - u(t) + \frac{1}{t} = 0 \quad , \quad t > 0 \quad , \quad u(1) = 1$$

bitte wenden!

Aufgabe 3: periodische Koeffizientenfunktionen

Im Folgenden betrachten wir die matrixwertige Differentialgleichung $Y' = F(x)Y$. Dabei sei $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^{k\times k}$ stetig differenzierbar und $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^{k\times k}$ habe eine ω-Periodizität, d.h. für ein $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $F(x+\omega) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die interessante Frage hierbei ist nun, ob man erwarten kann, dass sich die Periodizität auch auf die Lösung Y überträgt? Diese Frage ist im Allgemeinen mit nein zu beantworten.

(a) Sei Y eine Fundamentalmatrix zu dem gegebenen System. Zeigen Sie, dass dann auch $Y(x+\omega)$ eine Fundamentalmatrix des Systems ist.

(b) Sei Y eine Fundamentalmatrix zu dem gegebenen System. Zeigen Sie, dass dann genau eine invertierbare Matrix $B_Y \in \mathbb{C}^{k\times k}$ existiert mit $Y(x+\omega) = Y(x)B_Y$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Matrix B_Y wird als *Übergangsmatrix* bezeichnet.

(c) Es seien Y eine Fundamentalmatrix mit $Y(0) = I$ und dazu $L \in \mathbb{C}^{k\times k}$ mit $B_Y = \exp(\omega L)$. Zeigen Sie, dass dann eine stetig differenzierbare Funktion $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^{k\times k}$ derart existiert, dass $P(0) = I$, $P(x)$ invertierbar, $P(x+\omega) = P(x)$ und $Y(x) = P(x)\exp(xL)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
(*Floquet*-Darstellung der Lösung).

(d) Bestimmen Sie die Floquet-Darstellung der Lösung des DGL-Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= \cos(x)y_1 + y_2 \\ y_2' &= \cos(x)y_2 \end{aligned}$$