Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 09.12.2011

Abgabe: 16.12.2011
vor Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis III

Blatt 08

Aufgabe 1: Abstraktes ganz konkret

Gegeben sei folgendes AWP $\dot{x}(t) = \lambda t x^2(t),\ x(\tau) = \xi$.

(a) Definieren Sie zu der reellen skalaren DGL die rechte Seite F und geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge $\mathcal{D}$ an. Ist F lokal Lipschitz-stetig?

(b) Bestimmen Sie die Abbildung Φ. Beachten Sie, dass $\Phi^{\lambda}_{t,\tau}(\xi)$ nichts anderes ist, als die Lösung des AWPs zum Zeitpunkt t.

(c) Ermitteln Sie das maximale Existenzintervall $I_{\max}(\tau, \xi, \lambda)$.

(d) Formulieren Sie die Anfangswertprobleme, die die Ableitungen von Φ nach ξ, τ und λ erfüllen. Zeigen Sie durch direktes Ableiten von Φ nach λ und Einsetzen, dass die Ableitung Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems ist. Wenn Sie möchten, können Sie dies auch für die übrigen Ableitungen durchführen.

Aufgabe 2: Stabilität

Im Folgenden betrachten wir die Bewegung einer Masse $m > 0$ im Gravitationsfeld $g = (0, -10)^T \in \mathbb{R}^2$ auf einer gegebenen Bahn $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Die Position x der Masse m zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch $x(t) = \gamma(\sigma(t))$, wobei $\sigma : [0, T] \longrightarrow [a, b]$ für ein $\alpha \geq 0$ gegeben ist durch folgende Bestimmungsgleichung:

$$\ddot{\sigma}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(\sigma(t))\|^2}\Big(mg \cdot \gamma'(\sigma(t)) - \dot{\sigma}(t)^2 \gamma''(\sigma(t)) \cdot \gamma'(\sigma(t))\Big) - \alpha\dot{\sigma}(t)$$

Nun betrachten wir die Bewegung auf einer

(a) Normalparabel **(b)** umgedrehten Normalparabel **(c)** horizontalen Linie

Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte dieser DGLs und untersuchen deren Stabilitätseigenschaften.

bitte wenden!

Aufgabe 3: Inhalte und Maße

Zeigen Sie:

(a) Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring. Sind $\mu_1, \ldots, \mu_n$ Inhalte auf $\mathcal{A}$ und $c_1, \ldots, c_n \geq 0$, dann ist auch $\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i$ definiert durch $\mu(A) = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ ein Inhalt auf $\mathcal{A}$. Sind alle μ_i endlich / σ-endlich / σ-additiv, dann ist μ endlich / σ-endlich / σ-additiv.

(b) Das Zählmaß $|\cdot| : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, \infty]$, wobei $|A|$ die Mächtigkeit von A sei, ist ein Maß und σ-endlich.

(c) Das Dirac-Maß ist σ-endlich und σ-additiv.

Aufgabe 4: kleinste σ-Algebra

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und M eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$. Wir bezeichnen mit $\sigma(M)$ die kleinste σ-Algebra, die M enthält. Zeigen Sie: Ist M endlich / abzählbar, so ist $\sigma(M)$ endlich / überabzählbar.