Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 22.12.2011

Abgabe: 13.01.2012
vor Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis III

Blatt 10

Aufgabe 1: Integral einer Treppenfunktion

Sei X eine Menge und $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring mit Inhalt λ. Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ bzw. $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{R}$ und $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ gegeben mit

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} d_j \mathbb{1}_{B_j}.$$

(a) Zeigen Sie:

(i) Für $c_i, d_j \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda(A_i) = \sum_{j=1}^{m} d_j \lambda(B_j)$$

(ii) Für beliebige Koeffizienten c_i, d_j jedoch endlichem Inhalt λ gilt ebenso

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda(A_i) = \sum_{j=1}^{m} d_j \lambda(B_j)$$

(b) Damit können wir nun für Treppenfunktionen $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit nichtnegativen Koeffizienten c_i das Integral sinnvoll definieren:

$$\int f \ \lambda \ := \ \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda(A_i)$$

Definieren wir für eine Treppenfunktion $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit beliebigen Koeffizienten c_i die Funktionen f^+ und f^- durch $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$, d.h.

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & , \text{ falls } \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \geq 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

und $f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}$, so können wir für den Fall, dass $\int f^+ \ \lambda$ und $\int f^- \ \lambda$ nicht beide unendlich sind, das Integral von f wie folgt definieren:

$$\int f \ \lambda \ := \ \int f^+ \ \lambda \ - \ \int f^- \ \lambda$$

Zeigen Sie: Für eine Treppenfunktion f gilt $\int f \ \delta_{\overline{x}} \ = \ f(\overline{x})$.

(c) Zeigen Sie: Für eine Treppenfunktion f, Konstanten $w_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in X$ gilt $\int f \big(\sum_{i=1}^{n} w_i \delta_{\overline{x}_i} \big) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(\overline{x}_i)$.

bitte wenden!

Aufgabe 2: Caratheodory Fortsetzung

Sei λ ein σ-additiver Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$ und $\mu = \lambda^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ die Caratheodory Fortsetzung von λ. Zeigen Sie, dass dann zu $A \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ disjunkte Mengen $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{R}$ existieren mit

$$\mu\big(A \,\Delta\, \dot\bigcup_{i=1}^n R_i\big) < \varepsilon,$$

wobei $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Mengendifferenz ist.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten,
ein paar erholsame Tage
und einen guten Start ins Jahr 2012!