Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 13.01.2012

Abgabe: 20.01.2012
**vor** Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

# Übungen zur Analysis III

Blatt 11

## Aufgabe 1: $\sigma$-Algebren, Borel-$\sigma$-Algebra

**(a)** Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra in $\Omega$. Was können Sie über $\sigma(\mathcal{A})$ sagen?

**(b)** Sei $\Omega$ eine Menge und $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$ und $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$. Zeigen Sie, dass dann $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ gilt.

**(c)** Sei $\tau_n$ die Normtopologie auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann $\sigma(\tau_n) = \sigma(\mathbb{J}_n) = \sigma(\mathbb{K}_n) = \sigma(\mathbb{L}_n)$ gilt, wobei

(i) $\mathbb{J}_n := \{[a,b] := [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n] \mid a,b \in \mathbb{R}^n\}$.

(ii) $\mathbb{K}_n := \{(a,b) := (a_1,b_1) \times \ldots \times (a_n,b_n) \mid a,b \in \mathbb{R}^n\}$.

(iii) $\mathbb{L}_n := \{(-\infty,b] := (-\infty,b_1] \times \ldots \times (-\infty,b_n] \mid b \in \mathbb{R}^n\}$.

## Aufgabe 2: Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß translationsinvariant ist, d.h. dass $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

## Aufgabe 3: Verteilungsfunktionen

Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung des Intervalles $[0,1)$ in $N$ Teilintervalle $[x_i, x_{i+1})$ für $i = 0, \ldots, N-1$. Desweiteren seien $m_j := \frac{x_{j-1}+x_j}{2}$ für $j = 1, \ldots, N$ die jeweiligen Mittelpunkte der Teilintervalle und folgende Maße gegeben:

**(a)** $$\mu = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{m_j}$$ **(b)** $$\mu = \frac{1}{N}\Big(\frac{1}{2}\delta_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \delta_{x_i} + \frac{1}{2}\delta_1\Big)$$

Skizzieren Sie jeweils die Verteilungsfunktionen und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Verteilungsfunktion des Maßes $\mu : A \longmapsto \lambda\big(A \cap [0,1)\big)$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Berechnen Sie für eine beliebige Treppenfunktion $f$ jeweils das Integral $\int f(x)\mu(dx)$ für die Maße aus (a) und (b). Kommen Ihnen die Ergebnisse bekannt vor?

## Aufgabe 4: Approximation messbarer Funktionen

**(a)** Sei $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ x \longmapsto x^+ = \max\{x, 0\}$ gegeben. Konstruieren Sie eine Folge von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbaren Treppenfunktionen $(f_n)$ mit $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in \overline{\mathbb{R}}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

**(b)** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Zeigen Sie, dass dann mit Hilfe Ihrer Folge aus (a), $g_n := f_n \circ g^+ - f_n \circ g^-$ eine Folge von $\mathcal{A}$-Treppenfunktionen ist mit $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$. Wann ist $g_n$ eine monotone Folge?