Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 20.01.2012

Abgabe: 27.01.2012
vor Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis III

Blatt 12

Aufgabe 1: Maße

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $s \in T^+_{\mathcal{A}}$ beliebig. Zeigen Sie, dass dann $\nu(A) := \int \mathbb{1}_A s\mu$ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

Aufgabe 2: messbare Funktionen I

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \int |f|\mu \; < \; \infty$$

Zeigen Sie insbesondere, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, falls $|f| \leq g$ für ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Aufgabe 3: μ-fast überall

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(a) Ist $|g| \leq f$ μ-fü, dann ist $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(b) Ist $g = f$ μ-fü, dann ist $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\int g\mu = \int f\mu$.

Aufgabe 4: Maß-Fortsetzung

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass dann genau eine Fortsetzung μ^* von μ auf $\mathcal{A}^* = \{A \cup M \mid A \in \mathcal{A},\ M \subset N \in \mathcal{A},\ \mu(N) = 0\}$ existiert.

Aufgabe 5: messbare Funktionen II

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Zeigen Sie, dass $f = u + iv : X \longrightarrow \mathbb{C}$ genau dann Borel-messbar ist, wenn $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar sind (die Borel-σ-Algebra ist z.B. die von den offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra).