Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 27.01.2012

Abgabe: 03.02.2012
vor Beginn der Vorlesung
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Analysis III

Blatt 13

Aufgabe 1: Integration bezüglich Maßen mit Dichte

(a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $g, f \geq 0$ messbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int g(f\mu) = \int (gf)\mu$$

(b) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \geq 0$ messbar. Zeigen Sie, dass dann folgende Äquivalenz gilt:

$$g \in \mathcal{L}^1(f\mu) \Longleftrightarrow gf \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

Zeigen Sie desweiteren, dass ebenfalls $\int g(f\mu) = \int (gf)\mu$ gilt.

Aufgabe 2: Eindeutigkeit von Dichten

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ messbar und $A \in \mathcal{A}$. Nach Satz 8.1 ist $\nu(A) := \int_A f\mu$ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Desweiteren sei μ σ-endlich. Zeigen Sie, dass dann die Dichte von ν bezüglich μ eindeutig μ-f.ü. ist.

Aufgabe 3: Eingeschränkte Maßräume

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für ein beliebiges $A \in \mathcal{A}$ betrachten wir nun den Maßraum $(A, \mathcal{A}|_A, \mu|_{\mathcal{A}|_A})$. Zeigen Sie:

(a) $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann messbar von $\mathcal{A}|_A$ nach $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, wenn

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & , \ x \in A \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

messbar von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Das Integral $\int f\mu|_{\mathcal{A}|_A}$ ist genau dann definiert, wenn das Integral $\int \tilde{f}\mu$ definiert ist. Die Werte der beiden Integrale sind dann gleich.

(c) Ist f messbar von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, so gilt:

$$\int_A f\mu = \int f|_A \mu|_{\mathcal{A}|_A}$$

Aufgabe 4: Integration und Fourier-Transformierte

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1$$

(b) Es sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$. Mit $\hat{f}$ bezeichnen wir die Fourier-Transformierte von f, d.h.

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) \lambda(dx).$$

Zeigen Sie, dass

$$\hat{f}(k) = ce^{-\frac{k^2}{2\alpha}}$$

gilt, indem Sie für $\hat{f}$ eine Differentialgleichung herleiten. Können Sie c bestimmen? (Bemerkung: die Fourier-Transformierte existiert für jede absolut Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Im Mehrdimensionalen gibt es eine entsprechende Definition)

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar und f als auch f' absolut Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte der Ableitung dann folgende Bedingung erfüllt:

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k)$$