Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen

Kapitel 1: Beispiele und Klassifikation

A) kontinuierliche Verzinsung

Sei $V : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ ein kontinuierlich verzinstes Vermögen

$t \longmapsto V(t)$

t: Zeit; $V(t)$: Vermögen zur Zeit t

durchschnittlicher Verzinsung im Intervall $[t, t+\Delta t]$: $\quad z(t,\Delta t) := \dfrac{V(t+\Delta t) - V(t)}{V(t)}$

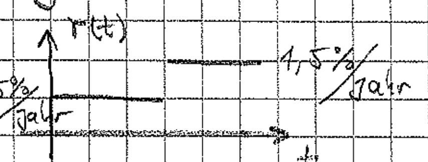
durchschnittlicher Zinssatz (Zinsrate) $\quad r(t,\Delta t) := \dfrac{z(t,\Delta t)}{\Delta t}$ $\quad$ (typ. Einheit $\frac{\%}{\text{Jahr}}$)

Idealisierung: momentane Zinsrate $\quad r(t) = \lim\limits_{\Delta t \downarrow 0} r(t,\Delta t) = \dfrac{1}{V(t)} \underbrace{\lim\limits_{\Delta t \downarrow 0} \dfrac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}}_{\text{Änderungsrate des Vermögens}}$

$$= \frac{V'(t)}{V(t)}$$

(existiert falls V rechtsseitig diffb.)

Sparbuch:



"langweilig" V gegeben $\rightsquigarrow$ $r(t) = \frac{V'(t)}{V(t)}$ berechnen

"spannend" r, $S\in(0,\infty)$ gegeben $\rightsquigarrow$ $\boxed{V \text{ berechnen, so dass } V(0)=S \text{ und zu jedem Zeitpunkt } t>0 \quad r(t) = \frac{V'(t)}{V(t)}}$

Zinssatz der Bank

Startvermögen des Kunden

Probleme dieses Typs heißen <u>Anfangswertprobleme</u> (AWP)

Die Gleichung $\frac{V'}{V} = r$

für die Funktion V mit <u>einem skalaren Argument</u>

beinhaltet Ableitungen von V

Gleichungen dieses Typs heißen <u>gewöhnliche Differenzialgleichungen</u> (GDGL)

// Lösungen von DGL sind <u>Funktionen</u> (Gleichungen in Funktionenräumen)

Standardform von Gleichungen "$\phi = 0$" mit $\phi(t, a_0, a_1) = \frac{a_1}{a_0} - r(t)$ ist DGL $\phi(t, V(t), V'(t)) = 0$

Definition 1.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und $D \subset (\mathbb{R}^n)^{k+1}$ für $n, k \in \mathbb{N}$. Hängt die Funktion $\phi : I \times D \to \mathbb{R}^m$ von ihrem letzten Argument ab, so nennt man eine Bedingung der Form

$$(*) \quad \forall t \in I : \phi(t, u(t), u'(t), u''(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = 0$$

eine gewöhnliche Differenzialgleichung k-ter Ordnung für $u : I \to \mathbb{R}^n$

weitere Sprachregelungen:

$m > 1$: System von DGL $\quad m = 1$: skalare DGL

$\partial_1 \phi = 0$: autonome DGL $\quad$ sonst nicht-autonome DGL

$\phi(t, v_0, \ldots, v_k) = \underset{\{+1,-1\}}{\underset{\cap}{s}}(v_k - F(t, v_0, \ldots, v_{k-1}))$: explizite DGL $\quad$ sonst implizite DGL

$(v_0, \ldots, v_k) \longmapsto \phi(t, v_0, \ldots, v_k)$ affin linear: lineare DGL $\quad$ sonst nichtlineare DGL

Ein Anfangswertproblem k-ter Ordnung ist eine DGL k-ter Ordnung mit Zusatzbedingungen der Form $u^{(j)}(t_0) = a_j$, wobei $(t_0, a_0, \ldots, a_k) \in I \times D$

$u : I \to \mathbb{R}^n$ heißt (globale) Lösung der DGL, wenn $u \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ und $(u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)) \in D$ für alle $t \in I$ und $(*)$ erfüllt ist.

$u \in C^k(J, \mathbb{R}^n)$ heißt lokale Lösung der DGL, wenn (*) für $J \subset I$ erfüllt ist und lokale Lösung des AWP wenn zusätzlich $t_0 \in J$ und $u^{(i)}(t_0) = a_i$ gilt $\square$

im Beispiel A: $\frac{V'}{V} = r \rightarrow \phi(t, v_0, v_1) = \frac{v_1}{v_0} - r(t)$ skalare, nicht-lineare, implizite nicht-autonome DGL erster Ord.

oder umgeformt $V' = rV \rightsquigarrow \phi(t, v_0, v_1) = v_1 - r(t) v_0$ skalare, lineare, explizite nicht-autonome DGL erster Ord.

B) Räuber-Beute Modell

$u : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$
$t \longmapsto u(t)$ Bevölkerungsdichte der Räuber zur Zeit t

$v : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ Bevölkerungsdichte der Beute zur Zeit t
$t \longmapsto v(t)$

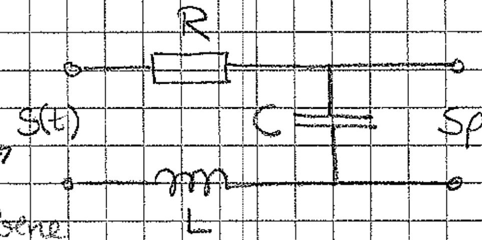
Änderungsrate

$$v'(t) = \underbrace{a v(t)}_{\text{Geburtenrate}} - \underbrace{b v(t) u(t)}_{\text{Sterberate}} \qquad u'(t) = \underbrace{c u(t) v(t)}_{\text{Geburtenrate}} - \underbrace{d u(t)}_{\text{Sterberate}}$$

(prop. zur Pop.größe) (prop. zur Pop.größe und zur Räuberzahl) (prop. zur Pop.größe und zum Futterangebot)

$$\phi(t, x, y) = (y_1 - a x_1 - b x_1 x_2, \; y_2 - c x_1 x_2 - d x_2)$$ explizites autonomes System nichtlinearer DGL erster Ordnung.

c) elektrischer Schwingkreis



vorgegebene zeitabhängige Spannung

Spannung $u(t)$ erfüllt $L\,u''(t) + R\,u'(t) + \frac{1}{C}\,u(t) = \frac{1}{C}\,S(t)$

nach Mult. mit $\frac{1}{L}$

$$\phi(t, v_0, v_1, v_2) = v_2 + \frac{R}{L} v_1 + \frac{1}{LC} v_0 - \frac{1}{LC} S(t)$$

skalare, lineare, nicht-autonome DGL zweiter Ordnung "langweilig": überprüfen ob gegebene Funktion u Lsg eines AWP

Beispiel: ist $V(t) = S \exp(r(t) \cdot t)$ Lösung des AWP aus (A) ?

überprüfe Anfangswert (AW): $V(0) = S \exp(r(0) \cdot 0) = S$ ✓

überprüfe DGL: $V'(t) = r(t) V(t) + t\, r'(t) V(t) \neq r(t) V(t)$

außer wenn $r(t) = \text{const}$
oder wenn $S = 0$.

→ i.A keine Lösung

"spannend": • hat ein AWP eine Lösung? "Existenz"

• gibt es mehrere Lösungen? "Eindeutigkeit"

• wie hängen Lösungen von Daten (AW, feste Fkt wie r) ab? "stetige Abhängigkeit von Daten"

• wie werden Lösungen systematisch berechnet? "analytische + <u>numerische</u> Lösungsmethoden"