Kapitel 2: DGL mit getrennten Variablen

sehr wenige DGL können analytisch gelöst werden, wichtige Klasse:

Definition 2.1: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset \mathbb{R}$ und $f: I \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$.
Dann heißt $\forall t \in I: \; u'(t) = f(t)\, g(u(t))$
DGL mit getrennten Variablen.

Konstruktion von Lösungen (siehe AI) zum zugeh. AWP $u(\bar{t}) = \bar{u}$:

"Physikermethode" $\quad u'(t) = f(t)\, g(u(t))$

$$\rightsquigarrow \frac{du}{dt} = f(t)\, g(u) \overset{\text{Satz?}}{\rightsquigarrow} \frac{du}{g(u)} = f(t)\,dt \overset{\text{Satz?}}{\rightsquigarrow} \int_{\bar{u}}^{u(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{\bar{t}}^{t} f(t)\,dt$$

Achtung: "Argument?"

ist G Stammfkt von $1/g$, F Stammfkt von f $\overset{\text{Satz?}}{\rightsquigarrow}$ $G(u(t)) - G(\bar{u}) = F(t) - F(\bar{t})$

$$\overset{\text{Satz?}}{\rightsquigarrow} \; u(t) = G^{-1}\big(F(t) - F(\bar{t}) + G(\bar{u})\big)$$

Saubere Variante: Seien f, g stetig, D offen (benötigt für Existenz von Stammfkt)

Dann sind $D_+ := \{x \in D \mid g(x) > 0\}$, $D_- := \{x \in D \mid g(x) < 0\}$ offen

Voraussetzung $\bar{u} \in D_+$ oder $\bar{u} \in D_-$; wir verfolgen $\bar{u} \in D_+$ weiter

Sei $U = \bigcup \{(a,b) \mid \bar{u} \in (a,b) \subset D_+\} = (A, B) \subset D_+$ maximales Intervall in D_+, das $\bar{u}$ enthält

Dann ist $1/g$ stetig auf U

HS: $G(u) := \int_{\bar{u}}^{u} \frac{1}{g(x)}\, dx$ $u \in U$ SF von $\frac{1}{g}$ mit $G(\bar{u}) = 0$

d.h. $G'(u) = \frac{1}{g(u)} > 0$ d.h. G streng monoton auf $U = (A, B)$

also invertierbar mit differenzierbarer Inversen G^{-1}

und $(G^{-1})'(u) = \frac{1}{G'(G^{-1}(u))} = g(G^{-1}(u))$

HS: $F(t) := \int_{\bar{t}}^{t} f(x)\, dx$ $t \in I$ ist SF von f mit $F(\bar{t}) = 0$

Ansatz $u(t) = G^{-1}\big(F(t) - \underbrace{F(\bar{t})}_{=0} + \underbrace{G(\bar{u})}_{=0}\big) = G^{-1}(F(t)) \quad t \in J$

mit $J = \bigcup \{(a,b) \mid \bar{t} \in (a,b) \subset F^{-1}(G(U))\} = (t_{min}, t_{max}) \subset I$

ist lokale Lösung, denn $u(\bar{t}) = G^{-1}(F(\bar{t})) = G^{-1}(0) = \bar{u}$ ✓

und $u'(t) = (G^{-1})'(F(t))\,F'(t) = g(\underbrace{G^{-1}(F(t))}_{=u(t)})\,f(t)$ ✓

das war lokale Existenz

Jede andere lokale Lösung $w : K \to \mathbb{R}$ mit $K \subset I$ Intervall

erfüllt auf $\tilde{K} \cap J$ mit $\tilde{K} = \bigcup \{(a,b) \mid \bar{t} \in (a,b) \subset w^{-1}(U)\}$

$$\frac{d}{dt}\big(G(w(t)) - F(t)\big) = G'(w(t))\,w'(t) - f(t) = \frac{1}{g(w(t))}\,g(w(t))\,f(t) - f(t) = 0$$

und $G(w(\bar{t})) - F(\bar{t}) = G(\bar{u}) - F(\bar{t}) = 0$ d.h.

$G(w(t)) - F(t) = 0$ auf $\tilde{K} \cap J$ also $w(t) = G^{-1}(F(t)) = u(t)$ ✓

Es gilt sogar $\tilde{K} \cap J = K \cap J$ („<u>lokale Eindeutigkeit</u> auf J")

$\subseteq$ ist klar

$\supseteq$ durch Widerspruch, sei $t \in K \cap J$ aber $t \notin \tilde{K}$ d.h. es gibt $\hat{t}$ zwischen $\bar{t}$ und t mit $w(\hat{t}) \notin U$

Sei $\tau(s) = (1-s)\bar{t} + s\hat{t}$ dann $\tau([0,1]) \subset K \cap J$ da $K \cap J$ konvex

Sei $\bar{s} = \sup\{ s \in [0,1] \mid w(\tau([0,s])) \subset U \}$

Fall 1 $w(\tau(\bar{s})) \in U$ dann $w(\tau([0, \bar{s}+\delta])) \subset U$ da U offen, w stetig, $\bar{s} < 1$, $\delta > 0$

$\Rightarrow \bar{s} < \bar{s} + \delta$ ↯

Fall 2 $w(\tau(\bar{s})) \notin U$ dann $w(\tau([0,s])) \subset U$ für $s < \bar{s}$

wegen $u(\tau(s)) = w(\tau(s))$ für $s < \bar{s}$ ist $w(\tau(\bar{s})) = \lim\limits_{s \uparrow \bar{s}} w(\tau(s)) = \lim\limits_{s \uparrow \bar{s}} u(\tau(s))$ (lok. eindeutig auf $K \cap J$ [illegible])

$= u(\tau(\bar{s})) \in U$ ↯

Beispiele: $\forall t \in I: \quad u'(t) = r(t)u(t) \quad , \quad u(\bar{t}) = \bar{u} \neq 0$

hier: $g(x) = x \quad , \quad f(t) = r(t) \quad , \quad F(t) = \int_{\bar{t}}^{t} r(\tau)\,d\tau \quad , \quad D = \mathbb{R}$

$D_+ = (0,\infty) \qquad D_- = (-\infty, 0)$

$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$U = (0,\infty) \qquad U = (-\infty, 0)$

$G(u) = \int_{\bar{u}}^{u} \frac{1}{x}\,dx \qquad G(u) = \int_{\bar{u}}^{u} \frac{1}{x}\,dx$

$= \ln u - \ln \bar{u} \qquad = \ln(-u) - \ln(-\bar{u})$

$G^{-1}(x) = \exp(x + \ln \bar{u}) \qquad G^{-1}(x) = -\exp(\ln(-\bar{u}) + x)$

$= \bar{u}\exp(x) \qquad = \bar{u}\exp(x)$

$G(U) = \mathbb{R} \qquad G(U) = \mathbb{R}$

$J = F^{-1}(\mathbb{R}) = I \qquad J = I$

in beiden Fällen: $u(t) = \bar{u}\exp\left(\int_{\bar{t}}^{t} r(\tau)\,d\tau\right) \quad t \in I$ ist globale Lösung und eindeutig.

Beispiel $\quad \forall t \in \mathbb{R}: \quad u'(t) = \sqrt{|u(t)|}, \quad u(\bar{t}) = \bar{u} > 0$

$g(x) = \sqrt{|x|}$, $D = \mathbb{R}$, $\quad f(t) = 1$ also $F(t) = t - \bar{t}$

$D_+ = (0, \infty) = \mathcal{U}$, $\quad G(u) = \int_{\bar{u}}^{u} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2(\sqrt{u} - \sqrt{\bar{u}})$, $\quad G^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}x + \sqrt{\bar{u}}\right)^2$

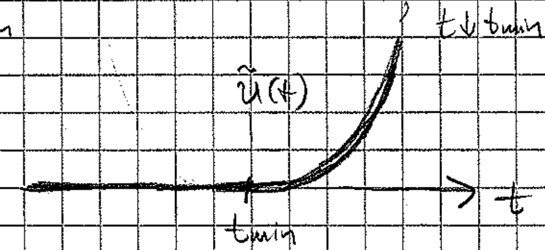
$G(\mathcal{U}) = (-2\sqrt{\bar{u}}, \infty)$, $\quad J = (\underbrace{\bar{t} - 2\sqrt{\bar{u}}}_{t_{min}}, \infty)$

$u(t) = \left(\frac{1}{2}(t - \bar{t}) + \sqrt{\bar{u}}\right)^2 = \frac{1}{4}(t - t_{min})^2 \qquad t > t_{min}$ ist lokale Lösung

Was passiert bei $t_{min} = \bar{t} - 2\sqrt{\bar{u}}$? $\qquad \lim_{t \downarrow t_{min}} u(t) = 0 \in \partial D_+$, $\lim_{t \downarrow t_{min}} u'(t) = 0$

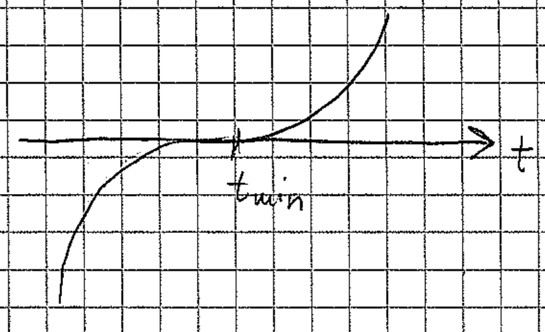
Fortsetzung zu globaler Lösung

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & t > t_{min} \\ 0 & t \leq t_{min} \end{cases}$$



oder auch mit

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & t > t_{min} \\ -u(2t_{min} - t) & t \leq t_{min} \end{cases}$$



d.h. globale Lösung ist nicht eindeutig

Beispiel: $\forall t \in \mathbb{R}: \quad u'(t) = u^2(t) \qquad u(\bar{t}) = \bar{u} > 0$

$g(x) = x^2, \quad f(t) = 1, \quad F(t) = t - \bar{t}$

$D = \mathbb{R}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad U = (0, \infty), \quad G(u) = \int_{\bar{u}}^{u} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{\bar{u}} - \frac{1}{u} \qquad u \in U$

$G^{-1}(x) = \dfrac{1}{1/\bar{u} - x}, \qquad G(U) = \left(-\infty, \frac{1}{\bar{u}}\right), \quad J = (-\infty, \underbrace{\bar{t} + 1/\bar{u}}_{t_{max}})$

$u(t) = \dfrac{1}{t_{max} - t}, \quad t < t_{max}$ lokale Lösung

was passiert bei t_{max}? $\quad \lim_{t \uparrow t_{max}} u(t) = \infty$ lokale Lösung "explodiert" in endlicher Zeit

Es gibt keine globale Lösung w

(denn $w = u$ auf J

also $w \uparrow \infty$ für $t \uparrow t_{max}$

$\leadsto$ w nicht stetig in t_{max} $\lightning$)

Wir werden sehen:

Verlust globaler Eindeutigkeit / globaler Existenz liegt an fehlender Lipschitzstetigkeit von

$u \mapsto \sqrt{|u|}$ bzw $u \mapsto u^2$