Kapitel 3: Lineare DGL Teil 1

(*) $\forall t \in I: \phi(t, u(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = 0$ lineare DGL

$\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $(v_0, \ldots, v_k) \longmapsto \phi(t, v_0, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^m$ affin linear für alle $t \in I$, $(v_0, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^{k+1}$

$$\Leftrightarrow \quad \phi(t, v_0, \ldots, v_k) = A_0(t)\, v_0 + A_1(t)\, v_1 + \ldots + A_k(t)\, v_k + b(t)$$

wobei $A_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b(t) \in \mathbb{R}^m$

Definition 3.1: Eine lineare DGL $\forall t \in I: \phi(t, u(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = 0$ heißt <u>homogen</u>, falls $\forall t \in I: \phi(t, 0, \ldots, 0) = 0$, ansonsten heißt sie <u>inhomogen</u>. Die DGL mit $\psi(t, v_0, \ldots, v_k) = \phi(t, v_0, \ldots, v_k) - \phi(t, 0, \ldots, 0)$ ~~heißt die zur linearen DGL gehörende homogene DGL.~~

In der Matrix-Vektor Schreibweise heißt das: $b = 0$ homogene, lineare DGL

$b \neq 0$ inhomogene, lineare DGL

Lemma 3.2: Die Lösungsmenge einer homogenen linearen DGL (*) ist ein linearer Unterraum von $C^k(I, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei $\mathcal{L}_0 = \{ v \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid v \text{ erfüllt } (*) \}$

beachte: $z : I \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto 0$ liegt in $\mathcal{L}$, da $(*)$ homogen, also $\mathcal{L} \neq \emptyset$

Seien $u, w \in \mathcal{L}$ dann gilt für jedes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ für $v = \lambda u + \mu w$

$$\phi(t, v(t), \dots, v^{(k)}(t)) = \lambda \underbrace{\phi(t, u(t), \dots, u^{(k)}(t))}_{=0} + \mu \underbrace{\phi(t, w(t), \dots, w^{(k)}(t))}_{=0} = 0 \quad \blacksquare$$

Lemma 3.3: Ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ einer inhomogenen linearen DGL nicht leer, so ist $\mathcal{L}$ ein affiner Unterraum von $C^k(I, \mathbb{R}^n)$. Mit $u \in \mathcal{L}$ gilt genauer $\mathcal{L} = u + \mathcal{L}_0$ wobei $\mathcal{L}_0$ die Lösungsmenge der zugehörigen homogenen DGL ist. Jede Lösung einer inhomogenen DGL lässt sich also darstellen als Summe einer <u>speziellen Lösung</u> $u \in \mathcal{L}$ der inhomogenen Gleichung und einer passenden Lösung w der homogenen Gleichung.

Beweis: Sei $\mathcal{L} \neq \emptyset$ und $u_1, u_2 \in \mathcal{L}$

Dann löst $w = u_1 - u_2$

$$\sum_{j=0}^{k} A_j(t) w^{(j)}(t) = \underbrace{\sum A_j(t) u_1^{(j)}(t) + b(t)}_{=0} - \Big(\underbrace{\sum A_j(t) u_2^{(j)}(t) + b(t)}_{=0} \Big) = 0$$

d.h. für festes $u \in \mathcal{L}$ ist $\mathcal{L} - u \subset \mathcal{L}_0$ d.h. $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0 + u$

umgekehrt gilt für jedes $w \in \mathcal{L}_0$, dass

$$\sum_{j=0}^{k} A_j(t) \left(w(t) + u(t) \right)^{(j)} + b(t) = \underbrace{\sum A_j(t) w^{(j)}(t)}_{=0} + \underbrace{\sum A_j(t) u^{(j)}(t) + b(t)}_{=0} = 0$$

also $\mathcal{L}_0 + u \subset \mathcal{L}$ $\blacksquare$

Satz 3.4: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a: I \to \mathbb{R}$ stetig, $\bar{t} \in I$ und $\bar{u} \in \mathbb{R}$

Dann hat die skalare, homogene lineare Differenzialgleichung

$u' = a u$ mit AW $u(\bar{t}) = \bar{u}$ die eindeutige Lösung

$$u(t) = \bar{u} \exp\left(\int_{\bar{t}}^{t} a(\tau)\, d\tau \right) \qquad t \in I$$

Beweis: Für $\bar{u} \neq 0$ wurde die Aussage in Kapitel 2 gezeigt.

$u(t) = 0$ ist Lösung im Fall $\bar{u} = 0$

Gäbe es weitere Lösung $\tilde{u} \neq 0$ im Fall $\bar{u} = 0$

so wäre $\tilde{u}(\tilde{t}) \neq 0$ für ein $\tilde{t} \in I$

also $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(\tilde{t}) \exp\left(\int_{\tilde{t}}^{t} a(\tau)\, d\tau \right)$ wegen Eindeutigkeit des AWP. $\begin{cases} u' = a u \\ u(\tilde{t}) = \tilde{u}(\tilde{t}) \end{cases}$

insbesondere $\tilde{u}(\bar{t}) > 0$ ↯.

$\blacksquare$

betrachte inhomogenen Fall $\quad (*) \; u' = au + b$

Ansatz für spezielle Lösung ("Variation der Konstanten")

$$u_s(t) = C(t) \exp\left(\int_{\underline{t}}^{t} a(\tau) d\tau \right)$$

↖ im homogenen Fall steht hier eine Konstante

bestimme C, so dass u_s Lösung von $(*)$

$$u_s'(t) = C'(t) \exp\left(\int_{\underline{t}}^{t} a(\tau) d\tau\right) + C(t)\, a(t) \exp\left(\int_{\underline{t}}^{t} a(\tau) d\tau \right) \overset{!}{=} a(t)\, u_s(t) + b(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad C'(t) = b(t) \exp\left(- \int_{\underline{t}}^{t} a(\tau) d\tau \right)$$

also z.B. $\quad C(t) = \displaystyle\int_{\underline{t}}^{t} b(s) \exp\left(- \int_{\underline{t}}^{s} a(\tau) d\tau \right) ds$

d.h. $\quad u_s(t) = \displaystyle\int_{\underline{t}}^{t} b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} a(\tau) d\tau \right) ds$

Zusammen mit Lemma 3.3 ergibt das

Satz 3.5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei $\bar{t} \in I$ und $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
Dann hat die allgemeine explizite skalare lineare DGL $u' = au + b$
mit AW $u(\bar{t}) = \bar{u}$ die eindeutige Lösung

$$u(t) = \bar{u} \exp\left(\int_{\bar{t}}^{t} a(\tau)\,d\tau \right) + \int_{\bar{t}}^{t} b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau \right) ds$$

Beweis: $u' = au + b$, $u(\bar{t}) = \bar{u}$ nachrechnen ✓
Wäre w weitere Lösung dann wäre $v = u - w$ Lösung des homogenen Problems
mit AW $v(\bar{t}) = 0$ also $v = 0$ nach Satz 3.4. $\blacksquare$

Bem: Statt Lösungsformel besser Ansatz "Variation der Konstanten" merken
und Formel neu herleiten.