Kapitel 4: Der Satz von Picard-Lindelöf

Hier geht es um Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu expliziten AWP

Schritt 1: Transformation auf DGL erster Ordnung

Beispiel: $u''(t) + \frac{R}{L} u'(t) + \frac{1}{LC} u(t) = \frac{1}{L} f(t)$ Ordnung $k = 2$, skalar

allgemein $u^{(k)}(t) = g(t, u(t), \dots, u^{(k-1)}(t)) \in \mathbb{R}^m$ System

- sammle Ableitungen bis Ordnung $k-1$ in einem Vektor

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \qquad \text{allg.} \quad X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \cdot m}$$

- drücke $X'(t)$ als Funktion von $\underline{X(t)}$ aus (kein u, u' etc darf mehr vorkommen)

$$X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2(t) \\ -\frac{R}{L} X_2(t) - \frac{1}{LC} X_1(t) + f(t) \end{pmatrix} =: F(t, X(t)) \in \mathbb{R}^2$$

jetzt Def von X und DGL in letzter Komponente nutzen!

allg: $$X'(t) = \begin{pmatrix} X_2(t) \\ \vdots \\ X_k(t) \\ g(t, X_1(t), \dots, X_k(t)) \end{pmatrix} =: F(t, X(t)) \in \mathbb{R}^{km}$$

Ist X Lsg von $X'(t) = F(t, X(t))$ dann steht

u in den obersten m Komponenten von x und darunter die Ableitungen von u

. es genügt also explizite DGL erster Ordnung zu betrachten (in Theorie & Numerik)!

Schritt 2: Umwandlung der DGL in Integralgleichung IGL

Lemma 4.1 $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $t_0 \in I$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in D$, $F \in C^0(I \times D, \mathbb{R}^n)$

$x \in C^1(I, D)$ ist Lösung von $x(t_0) = x_0$, $\forall t \in I: x'(t) = F(t, x(t))$

$$\Updownarrow$$

$x \in C^0(I, D)$ ist Lösung von $\forall t \in I: x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds$

Gleichung die x und Integralausdruck mit x enthält: IGL

Beweis $\Downarrow$ $x \in C^1 \subset C^0$

HS: $x(t) - \underbrace{x(t_0)}_{= x_0} = \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds$

$\Uparrow$ $s \mapsto F(s, x(s))$ stetig als Verkettung stetiger Fkten

HS: $t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,ds$ diffbar mit Ableitung $t \mapsto F(t, x(t))$, $t \in I$ stetig!

wegen IGL also x diffbar und x' stetig d.h. $x \in C^1(I, D)$

außerdem $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} F(s, x(s))\,ds = x_0$ ✓ und $x'(t) = F(t, x(t))$ $t \in I$ ✓ ▨

Was bringt's ? DGL $x'(t) = F(t, x(t))$ ist Gleichung in $C^0(I, D)$

für Lösung in $C^1(I, D)$

IGL ist Gleichung in $C^0(I, D)$ für Lösung in $C^0(I, D)$

es ist sogar eine <u>Fixpunktgleichung</u> ... dazu haben wir eine Lösungstheorie

3) FP Formulierung

$$\forall t \in I: x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds$$ Gleichungen in $\mathbb{R}^n$

$$x = \Phi(x)$$ Gleichung in $C^0(I, D) =: X$

was ist Φ: Sei $u \in X$ beliebig

$v = \Phi(u)$ ist dann die Funktion $v(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))\, ds$

in Lemma 4.1 haben wir gesehen $v \in C^1(I, D) \subset X$

also $\Phi: X \to X$ ist <u>Selbstabbildung</u>

und $x = \Phi(x)$ ist unsere IGL!

Benutze Banachschen FP-Satz: • $\Phi : X \to X$ Selbstabbildung ✓

• X vollst. metr. Raum ? Lemma 4.2

• Φ Kontraktion ? Lemma 4.3

Wir wissen $C^0([a,b],\mathbb{R})$ mit $\|u\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |u(t)|$ ist Banachraum - also vollständig

Lemma 4.2: Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ $g : [a,b] \to (0,\infty)$ sei stetig $X = C^0(I,\mathbb{R}^n)$ und

$\|u\|_g := \sup_{t\in I} \|g(t)u(t)\|_\infty$ für $u \in X$. Dann ist $(X, \|\cdot\|_g)$ ein Banachraum

Beweis: da $g : [a,b] \to (0,\infty)$ stetig ist $0 < g(x_{min}) \leq g(x) \leq g(x_{max}) < \infty$ für alle $x \in [a,b]$

$g(x_{min}) \|u(t)\|_\infty \leq \|g(t)u(t)\|_\infty \leq g(x_{max}) \|u(t)\|_\infty$

und $\|u_i\|_\infty = \sup_{t\in I} |u_i(t)| \leq \sup_{t\in I} \|u(t)\|_\infty \leq \frac{1}{g(x_{min})} \|u\|_g$

und $\|u\|_g \leq g(x_{max}) \sup_{t\in I} \|u(t)\|_\infty \leq g(x_{max}) \max_{i=1}^{n} \|u_i\|_\infty$

$(v^{(k)})$ CF in X $\Rightarrow$ $(v_i^{(k)})$ CF in $C^0(I,\mathbb{R})$

vollst.

$v^{(k)} \to \bar{v}$ in X $\Leftarrow$ $v_i^{(k)} \to \bar{v}_i$ in $C^0(I,\mathbb{R})$

■

Fehlt noch $\| \phi(u) - \phi(v) \|_g \leq q \| u - v \|_g$ mit $q < 1$ (Kontraktion)

Lemma 4.3: Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ und $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ erfülle für ein $L \geq 0$

$$\forall t \in I \;\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \; \| F(t,x) - F(t,y) \|_\infty \leq L \| x - y \|_\infty$$

(d.h. $(t,x) \mapsto F(t,x)$ ist Lip-stetig in x gleichmäßig in t)

Dann ist ϕ eine $\| \; \|_g$ Kontraktion mit $g(t) = e^{-(L+1)|t - t_0|}$

Beweis: $\| \phi(u) - \phi(v) \|_g = \sup_{t \in I} g(t) \left\| x_0 + \int_{t_0}^t F(s, u(s))\, ds - \left(x_0 + \int_{t_0}^t F(s, v(s))\, ds \right) \right\|_\infty$

$$\leq \sup_{t \in I} g(t) \int_\alpha^\beta \| F(s, u(s)) - F(s, v(s)) \|_\infty \, ds$$

$\alpha = \min(t, t_0) \quad \beta = \max(t, t_0)$

$$\leq \sup_{t \in I} g(t) \int_\alpha^\beta L \frac{1}{g(s)} \underbrace{g(s) \| u(s) - v(s) \|_\infty}_{\leq \| u - v \|_g} ds$$

wegen $g(t)\int_\alpha^\beta \frac{1}{g(s)}\,ds = \frac{1}{L+1}\left(1-e^{-(L+1)|t-t_0|}\right) \leq \frac{1}{L+1}$

folgt $\|\phi(u)-\phi(v)\|_g \leq \underbrace{\frac{L}{L+1}}_{<1} \|u-v\|_g$ ∎

Satz 4.4: (Picard-Lindelöf global)

Sei $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$, $t_0\in I$, $F\in C^0(I\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $x_0\in\mathbb{R}^n$ und $(t,x)\mapsto F(t,x)$ sei Lip-stetig in x gleichmäßig in t.
Dann hat das AWP $\forall t\in I: x'(t)=F(t,x(t))$, $x(t_0)=x_0$ eine eindeutige globale Lösung $x\in C^1(I,\mathbb{R}^n)$

Beweis: Banachscher Fixpunktsatz angewendet auf $\phi: X\to X$ mit Norm $\|\cdot\|_g$ aus Lemma 4.3 liefert eindeutige Lsg von IGL $x=\phi(x)$ und wegen Lemma 4.1 auch eindeutige Lsg der DGL ∎

Bemerkungen:

1) FP Satz sagt noch mehr: $u^{(n+1)} = \Phi(u^{(n)})$ $u^{(0)} \in X$ konvergiert gegen FP

aber: für praktische Zwecke ist Konvergenz oft zu langsam.

2) bei Gleichungen höherer Ordnung $u^{(k)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t))$

überträgt sich Lip-Stetigkeit von f auf Lip-Stetigkeit von $F(t,x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ f(t, x_1, \dots, x_k) \end{pmatrix}$

AW $x(t_0) = \bar{x}$ entspricht AWen $u(t_0) = \bar{x}_1$, $u'(t_0) = \bar{x}_2, \dots, u^{(k-1)}(t_0) = \bar{x}_k$

also: explizite Gleichung k-ter Ordnung

hat eindeutige globale Lösung

wenn rechte Seite $(t, v_0, \dots, v_{k-1}) \longmapsto f(t, v_0, \dots, v_{k-1})$

Lip-stetig in $(v_0, \dots, v_{k-1})$ glm in t

und $u(t_0), \dots, u^{(k-1)}(t_0)$ vorgegeben

Satz 4.4 erfasst nicht • $x' = x^2$, $x(0)=1$ da $F(x) = x^2$ nicht Lipschitzstetig

• $x' = \sqrt{x}$, $x(0) = 1$ da $F(x) = \sqrt{x}$ nicht auf $\mathbb{R}$ definiert

in beiden Fällen erhält man nur lokale Lösungen, da F nur lokal Lipschitzstetig

Definition 4.5: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}^n$. $f: D \to \mathbb{R}^n$ erfüllt die lokale Lipschitzbedingung in D, falls für alle $(t,x) \in D$ ein $L_{t,x} \geq 0$ und eine Umgebung U von (t,x) existiert mit

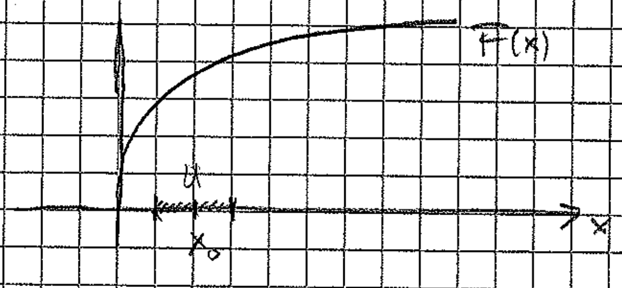
$$\forall (s,x_1),(s,x_2) \in U \cap D : \|f(s,x_1) - f(s,x_2)\|_\infty \leq L_{t,x} \|x_1 - x_2\|_\infty$$

beachte: ist D offen und $f \in C^1(D,\mathbb{R}^n)$ dann erfüllt f die lokale Lipschitzbedingung

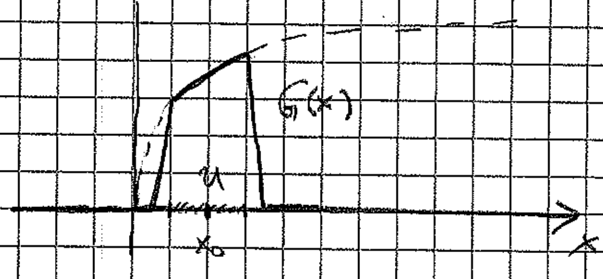
(benutze Mittelwertsatz)

Idee für lokalen Existenzsatz:

- ersetze



durch

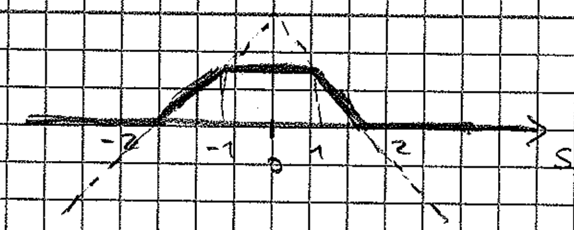


mit $F|_U = G|_U$ und G global Lip-stetig

- löse $x'(t) = G(x(t))$, $x(t_0) = x_0$
- solange $x(t) \in U$ gilt auch $x'(t) = F(x(t))$
- damit lokale Lösung für $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ mit passend kleinem $\varepsilon > 0$.

Lemma 4.6: Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $(t_0, x_0) \in D$, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle lokale Lipschitzbedingung in D. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und $G \in C^0(I_\varepsilon \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $I_\varepsilon = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $D_\varepsilon = I_\varepsilon \times \overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset D$, $G|_{D_\varepsilon} = F|_{D_\varepsilon}$ und $(t,x) \mapsto G(t,x)$ ist Lip-stetig in x glm in t.

Beweis: $\varphi(s) := \max(\min(2-|s|, 1), 0)$, $s \in \mathbb{R}$



ist Lip-stetig mit Konstante 1

und $\varphi(s) = 0$ für $|s| \geq 2$, $\varphi(s) = 1$ für $|s| \leq 1$

Für $\delta > 0$ ist $\varphi_\delta(s) := \varphi\left(\frac{s}{\delta}\right)$ Lip-Stetig mit Konstante $\frac{1}{\delta}$

und $\varphi_\delta(s) = 0$ für $|s| \geq 2\delta$, $\varphi_\delta(s) = 1$ für $|s| \leq \delta$

damit erfüllt: $\psi_\delta(x) = \varphi_\delta(\|x - x_0\|_\infty)$ $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\psi_\delta(x) - \psi_\delta(y)| \leq \frac{1}{\delta} \left| \|x - x_0\|_\infty - \|y - x_0\|_\infty \right| \leq \frac{1}{\delta} \|x - x_0 - (y - x_0)\|_\infty = \frac{1}{\delta} \|x - y\|_\infty$$

$\psi_\delta(x) = 0$ für $\|x - x_0\|_\infty \geq 2\delta$ und $\psi_\delta(x) = 1$ für $\|x - x_0\|_\infty \leq \delta$

Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $B_{3\varepsilon}(t_0, x_0) \subset D$ und

$$\| F(t,x) - F(t,y) \|_\infty \leq L \|x-y\| \quad \text{für } (t,x), (t,y) \in B_{3\varepsilon}(t_0,x_0)$$

Dann ist insbesondere dort

$$\|F(t,x)\|_\infty \leq \|F(t,x) - F(t_0,x_0)\|_\infty + \|F(t_0,x_0)\|_\infty \leq 3L\varepsilon + \|F(t_0,x_0)\|_\infty \quad \text{beschränkt}$$

Sei $G(t,x) := \begin{cases} \psi_\varepsilon(x) F(t,x) & (t,x) \in I_\varepsilon \times B_{3\varepsilon}(x_0) \\ 0 & (t,x) \in I_\varepsilon \times B_{3\varepsilon}(x_0)^c \end{cases}$

dann $G \in C^0(I_\varepsilon \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $G|_{D_\varepsilon} = F|_{D_\varepsilon}$

Fall $x,y \in B_{2\varepsilon}(x_0)^c$ $\quad \|G(t,x) - G(t,y)\|_\infty = 0 \|x-y\|_\infty$ ✓

Fall $x \in B_{2\varepsilon}(x_0)$, $y \in B_{2\varepsilon}(x_0)^c$ $\quad \|G(t,x) - G(t,y)\|_\infty = \|\psi_\varepsilon(x) F(t,x)\|_\infty = \|\psi_\varepsilon(x) F(t,x) - \psi_\varepsilon(y) F(t,x)\|_\infty$

$$\leq (3\varepsilon L + \|F(t_0,x_0)\|_\infty) \cdot \tfrac{1}{\varepsilon} \|x-y\|_\infty \quad ✓$$

Fall $x \in B_{2\varepsilon}(x_0)^c$, $y \in B_{2\varepsilon}(x_0)$ analog

Fall $x,y \in B_{2\varepsilon}(x_0)$: $\quad \|G(t,x) - G(t,y)\|_\infty \leq \|\psi_\varepsilon(x)(F(t,x) - F(t,y))\|_\infty + \|(\psi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(y)) F(t,y)\|_\infty$

$$\leq L\|x-y\|_\infty + (3\varepsilon L + \|F(t_0,x_0)\|_\infty) \tfrac{1}{\varepsilon} \|x-y\|_\infty \quad ✓$$

Lip-Konstante von G: $\quad 4L + \tfrac{1}{\varepsilon}\|F(t_0,x_0)\|_\infty$

$\blacksquare$

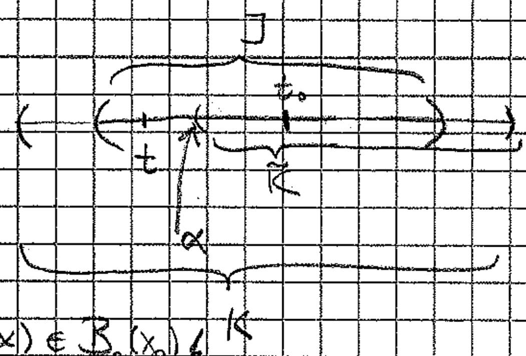
Satz 4.6 (Picard-Lindelöf lokal)

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ genügt lokaler Lip-Bedingung.
Dann existiert zu jedem $(t_0, x_0) \in D$ eine lokale Lösung $x \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$
des AWP $x(t_0) = x_0$, $x'(t) = F(t, x(t))$. Jede andere lokale Lösung
$y \in C^1(K, \mathbb{R})$ stimmt auf $K \cap J$ mit x überein.

Beweis: Satz 4.4 für $x(t_0) = x_0$, $x'(t) = G(t, x(t))$ mit G aus Lemma 4.6 liefert
globale Lösung $\tilde{x}$. $\tilde{x}^{-1}(B_\varepsilon(x_0))$ ist offen in I_ε d.h. es gibt $J = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \tilde{x}^{-1}(B_\varepsilon(x_0))$, $\delta < \varepsilon$
setze $x := \tilde{x}|_J$; dann ist x lok. Lösung von $x'(t) = F(t, x(t))$.

Sei $y \in C^1(K, \mathbb{R}^n)$ weitere Lösung. Auf $\tilde{K} = \bigcup \{ (a,b) \mid t_0 \in (a,b) \subset y^{-1}(B_\varepsilon(x_0)) \}$
löst y auch $y'(t) = G(t, y(t))$
Da G globale Lip-Bedingung erfüllt ist AWP eindeutig lösbar auf jedem Intervall $[a,b] \subset \tilde{K} \cap J$
d.h. $x(t) = y(t)$ $t \in [a,b] \subset \tilde{K} \cap J$
Es gilt $\tilde{K} \cap J = K \cap J$ „$\subseteq$" klar „$\supseteq$" durch Widerspruch.

Sei $t \in K \cap J$, $t \notin \tilde{K} \cap J$ dann ist $\partial(\tilde{K} \cap J) \cap J \neq \emptyset$



Sei (t_n) Folge in $\tilde{K} \cap J$ mit $t_n \longrightarrow \alpha \in \partial(\tilde{K} \cap J) \cap J$

nach Def von $\tilde{K}$ ist $y(\alpha) \notin B_\varepsilon(x_0)$

aber wegen Stetigkeit ist $y(\alpha) = \lim y(t_n) \underset{\substack{\text{Eindeutigkeit} \\ \text{auf } \tilde{K} \cap J}}{=} \lim x(t_n) = x(\alpha) \in B_\varepsilon(x_0)$ ↯

■