Kapitel 5: Lineare DGL – Teil 2

allgem. lineare DGL $\quad \tilde{A}_k(t)u^{(k)}(t) + \dots + \tilde{A}_0(t)u(t) + \tilde{b}(t) = 0$

wenn $\tilde{A}_k(t)$ invbar für jedes t Umwandlung in explizite DGL k-ter Ordnung möglich

$$u^{(k)}(t) = -\tilde{A}_k(t)^{-1}\left(\tilde{A}_0(t)u(t) + \dots + \tilde{A}_{k-1}(t)u^{(k-1)}(t) + \tilde{b}(t)\right)$$

als System für $x(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}$

wir betrachten allg. Systeme dieses Typs

$$\boxed{x'(t) = A(t)x(t) + b(t)} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I & & \\ & 0 & I & \\ & & \ddots & \\ & & 0 & I \\ -\tilde{A}_k^{-1}\tilde{A}_0 & \dots & & -\tilde{A}_k^{-1}\tilde{A}_{k-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\tilde{A}_k^{-1}\tilde{b} \end{pmatrix}$$

$F(t,x) = A(t)x + b(t) \Rightarrow$ Chance auf Lip-Bedingung?

$$\|F(t,x) - F(t,y)\|_\infty = \|A(t)(x-y)\|_\infty \le \underbrace{\|A(t)\|}_{\text{Zeilensummennorm}} \|x-y\|_\infty \le \underbrace{\sup_{t \in I} \|A(t)\|}_{=:L} \|x-y\|$$

Dann L auf komp. I endlich ist gilt Lemma 5.1.

Lemma 5.1: Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $b : I \to \mathbb{R}^n$. Genau dann ist

$$(t,x) \mapsto F(t,x) = A(t)x + b(t) \in C^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$ wenn A und b stetig sind.

In diesem Fall erfüllt F die globale Lipschitz Bedingung

Beweis: wenn A, b stetig dann auch F (Produkte/Summen stetiger Funktionen)

Sei F stetig auf $I \times \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $t \longrightarrow b(t) = F(t,0)$ stetig

und $$t \mapsto A_{ij}(t) = e_i^T A(t) e_j = \underbrace{e_i^T \underbrace{(\underbrace{F(t,e_j)}_{\text{stetig}} - \underbrace{b(t)}_{\text{stetig}})}_{\text{stetig}}}_{\text{stetig}}$$

wenn A stetig auf I dann ist $\|A(t)\| = \max_i \sum |A_{ij}(t)| \leq C$ auf I

und damit $L = \sup_{t \in I} \|A(t)\| \leq C < \infty$ ∎

Satz 5.2: Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C^0(J, \mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Dann hat das AWP $x(t_0) = x_0$, $\forall t \in J$: $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$

eine eindeutige globale Lösung.

Beweis: $J = \bigcup \underbrace{\{ [a,b] \mid t_0 \in [a,b] \subset J \}}_{\mathcal{K}}$

Für $I \in \mathcal{K}$ ist AWP eindeutig lösbar (Lemma 5.1 + PL global) mit Lsg x_I

Für $t \in J$ beliebig gibt es $I \in \mathcal{K}$ mit $t \in I$

Definiere $x(t) := x_I(t)$ wohldef? Lösung des AWP? $\longrightarrow$ Übung $\blacksquare$

Umformulierung in Sprache der lin. Algebra:

Lemma und Def 5.3: Sei $\mathcal{L}_0$ der Lösungsraum der homogenen DGL $x'(t) = A(t)x(t)$

mit $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf dem Intervall J und sei $\bar{t} \in J$.

Genau dann ist der lineare <u>Auswertungsoperator</u> $\delta_{\bar{t}} : C^0(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto x(\bar{t})$

ein Isomorphismus auf $\mathcal{L}_0$ wenn die DGL mit AW $x(\bar{t}) = \bar{x}$ für jedes

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist. Die Inverse $\delta_{\bar{t}}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}_0$ heißt dann

<u>Lösungsoperator</u> zum AWP in $\bar{t}$

Beweis: Zunächst gilt $\delta_{\bar t}(ax+by) = (ax+by)(\bar t) = a\,x(\bar t) + b\,y(\bar t) = a\,\delta_{\bar t}(x) + b\,\delta_{\bar t}(y)$

also $\delta_{\bar t}$ linear ✓

$\delta_{\bar t}$ Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $\delta_{\bar t}$ <u>surjektiv</u> $\Leftrightarrow$ zu jedem $\bar x \in \mathbb{R}^n$ gibt es $\overset{\text{hom. AWP}}{\boxed{x \in \mathcal{L}_0 \text{ mit } \delta_{\bar t}(x) = \bar x}}$ $\Leftrightarrow$ Existenz

und $\delta_{\bar t}$ <u>injektiv</u> $\Leftrightarrow$ wenn $\underbrace{\delta_{\bar t}(x_1) = \delta_{\bar t}(x_2)}_{\text{gleicher AW}}$ ist $\underbrace{x_1 = x_2}_{\text{gleiche Lsg}}$ $\Leftrightarrow$ Eindeutigkeit ☒

<u>beachte</u> $x = \delta_{\bar t}^{-1}(\bar x) \in \mathcal{L}_0$ erfüllt $\delta_{\bar t}(x) = \bar x$ ist also Lsg von $x'(t) = A(t)x(t)$ mit $x(\bar t) = \bar x$.

Satz und Def 5.4: Die homogene DGL $x'(t) = A(t)x(t)$ mit stetiger Koeffizientenmatrix $A: J \to \mathbb{R}^{n\times n}$

hat einen n-dimensionalen Lösungsraum.

Eine Basis von $\mathcal{L}_0$ wird <u>Fundamentalsystem</u> genannt.

Eine Matrixfunktion $t \to M(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in deren Spalten Elemente

von $\mathcal{L}_0$ stehen heißt <u>Wronski-Matrix</u> der DGL.

Beweis: Mit Satz 5.2 ist $\delta_{\bar t}: \mathcal{L}_0 \to \mathbb{R}^n$ Isomorphismus wenn $\bar t \in J$ ☒

Konstruktion eines Fundamentalsystems:

- wähle $\bar{t} \in J$
- löse $x'(t) = A(t)\,x(t)$ mit AWen $e_1, e_2, \dots, e_n$ von den Basisvektoren

$$\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ w_1 & w_2 & & w_n \end{array}$$

da $\delta_{\bar{t}}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_0$ Isomorphismus wird der Basis $e_1, \dots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$

eine Basis $w_1 = \delta_{\bar{t}}^{-1}(e_1), \dots, w_n = \delta_{\bar{t}}^{-1}(e_n)$ des $\mathcal{L}_0$ also ein Fundamentalsystem

die zugehörige Wronski-Matrix $t \mapsto W(t, \bar{t}) := \big(w_1(t) \; \dots \; w_n(t) \big)$

liefert den Lösungsoperator des AWPs in $\bar{t}$: $\delta_{\bar{t}}^{-1}(\bar{x}) = W(\cdot, \bar{t})\,\bar{x}$ denn

$$\delta_{\bar{t}}\big(W(\cdot, \bar{t})\,\bar{x}\big) = \delta_{\bar{t}}\Big(\sum \bar{x}_i w_i\Big) = \sum \bar{x}_i\, \delta_{\bar{t}}(w_i) = \sum \bar{x}_i e_i = \bar{x} \qquad \text{insbes. } W(\bar{t}, \bar{t}) = \mathbb{I}$$

// also jede Lösung der hom. Gleichung ergibt sich durch Linearkombination von nur n Lösungen der hom. Gleichung //

! wichtige Bedeutung: $x'(t) = A(t)\,x(t)$ mit n Randbedingungen $e(x) = 0$ Gleichung im Fktraum

wird zu Gleichungssystem $e\big(\underbrace{W(\cdot, \bar{t})\,\bar{x}}_{\text{Parametrisierung aller Lösungen}}\big) = 0$ für $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (linear, wenn e linear)

siehe Übungen

Lemma 5.5. Sei $M \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ eine Wronski-Matrix zu $x'(t) = A(t)x(t)$

und sei $W(\cdot, \bar{t})\bar{x} = \delta_{\bar{t}}^{-1}(\bar{x})$. Dann gilt

a) $M'(t) = A(t)M(t)$

b) $M(t) = W(t, \bar{t}) M(\bar{t})$

c) $\det M(\hat{t}) = 0$ für ein $\hat{t} \in J \iff \det M(t) = 0$ für alle $t \in J$

d) $W(t_1, t_2)^{-1} = W(t_2, t_1)$ bzw allgemeiner $W(t_1, t_3) = W(t_1, t_2) W(t_2, t_3)$

Beweis: Sei $M(t) = (m_1(t) \cdots m_n(t))$ nach Def $m_i'(t) = A(t)\, m_i(t)$

also $M'(t) = (A(t) m_1(t) \cdots A(t)\, m_n(t)) = A(t)(m_1(t) \cdots m_n(t)) = A(t)\, M(t)$

und $m_i(t)$ erfüllt AW $m_i(\bar{t}) = m_i(\bar{t})$ also $m_i(t) = W(t, \bar{t})\, m_i(\bar{t})$

so dass $M(t) = W(t, \bar{t})\, M(\bar{t})$

$\det M(t) = \det W(t, \hat{t}) \det M(\hat{t})$ impliziert (c)

mit $M(t) := W(t, t_3)$ ist

$M(t_1) = W(t_1, t_2) M(t_2) = W(t_1, t_2) W(t_2, t_3)$

für $t_1 = t_3$ ist $W(t_1, t_1) = I$ also $I = W(t_1, t_2) W(t_2, t_1)$ ∎

Zur Lösung des inhomogenen Problems wird spezielle Lösung benötigt

Ansatz: Variation der Konstanten $\quad x_s(t) = W(t,\bar{t})\, C(t)$

Dann gilt $\quad x_s'(t) = \underbrace{\Big(\frac{d}{dt} \underbrace{W(t,\bar{t})}_{\text{Wronski}} \Big)}_{= A(t) W(t,\bar{t})} C(t) + W(t,\bar{t})\, C'(t)$

$$= A(t)\, x_s(t) + W(t,\bar{t})\, C'(t)$$

also $\quad x_s'(t) = A(t)\, x_s(t) + b(t) \iff C'(t) = W(t,\bar{t})^{-1} b(t) = W(\bar{t},t)\, b(t)$

erfüllt zB für $\quad C(t) = \int_{\bar{t}}^{t} W(\bar{t},s)\, b(s)\, ds \quad$ wenn b stetig

also $\quad x_s(t) = W(t,\bar{t})\, C(t) = \int_{\bar{t}}^{t} W(t,\bar{t})\, W(\bar{t},s)\, b(s)\, ds = \int_{\bar{t}}^{t} W(t,s)\, b(s)\, ds$

Satz 5.6: Sei $J \subset \mathbb{R}$ Intervall, $A \in C^0(J, \mathbb{R}^{n \times n})$, $b \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dann hat das AWP $x(t_0) = x_0$, $\forall t \in J: x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$

die eindeutige Lösung: $x(t) = W(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} W(t,s)b(s)\,ds$

wobei $W(\cdot, t)\bar{x} = S_t(\bar{x})$ der Lösungsoperator des zugeh. homogenen AWPs ist.

Beweis: Lemma 5.3 + Formel für x_s + Satz 5.4 $\blacksquare$