Kapitel 6: Die Matrixexponentialfunktion

Wir befassen uns mit dem Spezialfall $x'(t) = A\,x(t)$ "konstante Koeffizienten"

Da $t \mapsto A$ stetig auf $\mathbb{R}$ sei hier stets $J = \mathbb{R}$

Ziel ist die Formel: $W(t, t_0) = \exp((t-t_0)A)$

Satz und Def 6.1: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann konvergiert die Matrixreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$ absolut in $\mathbb{C}^{n\times n}$. Der Grenzwert wird mit $\exp(A)$

bezeichnet. Er erfüllt $\exp(0) = I$ und $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$.

Beweis: Sei $\|\cdot\|$ Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ induziert durch Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^n$

Dann $\|A\,B\| \le \|A\|\,\|B\|$ $\qquad \|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

also $\|A^m\| \le \|A\|\,\|A^{m-1}\| \le \dots \le \|A\|^m$

also $\sum_{m=0}^{\infty} \|\frac{1}{m!}A^m\| \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\|A\|^m = \exp(\|A\|) < \infty$ d.h. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}A^m$ absolut konv

(impliziert dass $\left(\sum_{m=0}^{M} \frac{1}{m!}A^m\right)_{M\in\mathbb{N}}$ CF in $(\mathbb{C}^{n\times n}, \|\cdot\|)$ und damit konvergent ist)

$\exp(0) = \frac{1}{0!}0^0 = I$ ✓

$$\exp(tA)_{kl} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} e_k^T A^m e_l \, t^m$$

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \operatorname{Re}(A^m)_{kl} t^m + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \operatorname{Im}(A^m)_{kl} t^m}_{\text{reelle Potenzreihen mit Konvergenzradius } \infty \text{ : Ableitung vertauscht mit } \sum_{m=0}^{\infty} \dots \text{ (AT)}}$$

$$\frac{d}{dt} \exp(tA)_{kl} \underset{\uparrow}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} e_k^T A^m e_l \, t^{m-1} = e_k^T \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^{m+1} t^m \, e_l$$

Ableiten + zusammenfassen $\quad = e_k^T \, A \exp(tA) \, e_l$ ☒

Im Weiteren betrachten wir $x'(t) = A x(t)$ mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

mi Lösung $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ als Kurzschreibweise für die reelle DGL

$$u'(t) = \operatorname{Re}(A) \, u(t) - \operatorname{Im}(A) \, v(t)$$

$$v'(t) = \operatorname{Im}(A) \, u(t) + \operatorname{Re}(A) \, v(t)$$

und der Definition $x(t) := u(t) + i\, v(t)$

Lemma 6.2: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Dann hat das AWP $x(0) = x_0$,
$\forall t \in \mathbb{R}: x'(t) = A\,x(t)$ die eindeutige Lösung $x(t) = \exp(tA)\,x_0$.

Beweis:
$$\left.\begin{aligned} x(0) &= \exp(0)\,x_0 = I\,x_0 = x_0 \quad ✓ \\ \frac{d}{dt}\,x(t) &= \left(\frac{d}{dt}\exp(tA)\right) x_0 = A\exp(tA)\,x_0 = A\,x(t) \quad ✓ \end{aligned}\right\} \text{Satz 6.1}$$

Eindeutigkeit mit Satz 5.2 ☒

Beispiel: $A = (\lambda) \in \mathbb{C}^{1\times 1}$ d.h. $\exp(t(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\lambda)^m t^m = (e^{t\lambda})$

d.h. $x(t) = e^{t\lambda}$ ist eine Lösung von $x' = \lambda x$, $\lambda(0) = 1$

auch für komplexe λ

Spezialfall $\lambda = i\omega \quad \omega \in \mathbb{R}$: $x(t) = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$

ist eindeutige Lösung von $x' = i\omega x \quad x(0) = 1$

bzw. in reeller Schreibweise.

$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ist eine Lösung von $\left.\begin{aligned} u'(t) &= -\omega\,v(t) \\ v'(t) &= \omega\,u(t) \\ u(0) &= 1,\ v(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} &u(0) = 1 \quad u'(0) = 0 \\ &\underline{u''(t) + \omega^2 u(t) = 0} \\ &\text{Schwingungsgleichung} \end{aligned}$

"Kommutator von A, B"

Lemma 6.3: Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $[A,B] = AB - BA = 0$

Dann gilt $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Insbesondere ist $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Beweis: Sei $\bar{x} \in \mathbb{C}^n$ beliebig. Wir zeigen $w(t) = \exp(t(A+B))\bar{x} - \exp(tA)\exp(tB)\bar{x} = 0$

denn $w(0) = \bar{x} - \bar{x} = 0$ ✓

und $w'(t) = (A+B)\exp(t(A+B))\bar{x} - A\exp(tA)\exp(tB)\bar{x} - \exp(tA)B\exp(tB)\bar{x}$

wegen $AB = BA$ ist $A^m B = A \cdots AAB = A \cdots ABA = A \cdots ABAA$

$= \ldots = BA^m$

also $\exp(tA)B = B\exp(tA)$ also

$w'(t) = (A+B)w(t)$

nach Lemma 6.2 $w(t) = \exp(t(A+B))w(0) = 0$.

mit $t = 1$ folgt $(\exp(A+B) - \exp(A)\exp(B))\bar{x} = 0$ für alle $\bar{x} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

also $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Da $[A, -A] = 0$ folgt die Beh. ∎

Satz 6.4: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann ist der Lösungsoperator zum AWP der DGL $x' = Ax$ im Punkt $\bar{t}$ gegeben durch

$$W(t,\bar{t}) = \exp((t-\bar{t})A) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Lemma 6.2 zeigt $W(t,0) = \exp(tA)$

und $W(t,\bar{t}) = W(t,0)W(0,\bar{t}) = W(t,0)W(\bar{t},0)^{-1} = \exp(tA)\exp(-\bar{t}A)$

$$= \exp((t-\bar{t})A) \quad \blacksquare$$

$$[tA, -\bar{t}A] = 0$$

Die allgemeine Lösungsformel für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten lautet damit

$$x(t) = \exp((t-t_0)A)x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)\, b(s)\, ds$$

(vergleiche skalarer Fall $x'(t) = ax(t) + b(t)$)

Fehlt noch: "direkte" Berechnung von $\exp(A)$

Lemma 6.5: Seien $A, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und U sei invertierbar. Dann gilt

$$U^{-1}\exp(A)\,U = \exp(U^{-1}AU)$$

Beweis: $U^{-1}A^m U = U^{-1}A \cdots A\,U = U^{-1}A\underbrace{(UU^{-1})}_{I}A\underbrace{(UU^{-1})}_{I}A \cdots A\underbrace{(UU^{-1})}_{I}A\,U = (U^{-1}AU)^m$

$$U^{-1}\exp(A)\,U = U^{-1}\left(\sum \tfrac{1}{m!}A^m\right)U = \sum \tfrac{1}{m!}(U^{-1}AU)^m = \exp(U^{-1}AU) \qquad \blacksquare$$

Fall 1: A ist diagonalisierbar d.h. es gibt eine Basis aus Eigenvektoren $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}^n$ mit $Au_i = \lambda_i u_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ die zugehörigen Eigenwerte

Nimm $U = (u_1 \cdots u_n)$ Eigenvektoren in den Spalten

dann $AU = (Au_1 \cdots Au_n) = (\lambda_1 u_1 \cdots \lambda_n u_n) = U\Lambda$ mit $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

also $U^{-1}AU = \Lambda$

Lemma 6.6: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar d.h. $U^{-1} A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Dann ist

$$\exp(tA) = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} U^{-1}$$

Beweis: $(U^{-1} \, tA \, U)^m = \begin{pmatrix} t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t\lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} (t\lambda_1)^m & & \\ & \ddots & \\ & & (t\lambda_n)^m \end{pmatrix}$

also $\exp(tA) = U U^{-1} \exp(tA) U U^{-1} \underset{\text{Lemma 6.5}}{=} U \exp\begin{pmatrix} t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t\lambda_n \end{pmatrix} U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} U^{-1}$

Merke: $\exp(tA)$ kann mit Eigenwerten, Eigenvektoren von A berechnet werden wenn A diagonalisierbar ist

aber: nicht jedes $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar

aber: jedes $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt <u>Jordansche Normalform</u>

Definition 6.7: Eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ heißt <u>Jordankästchen</u> der Größe k.

Eine Blockdiagonalmatrix $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\ell \end{pmatrix}$ aus Jordankästchen heißt <u>Jordanmatrix</u>.

Satz 6.8: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann existiert eine invertierbare Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und eine Jordanmatrix J, so dass $U^{-1} A U = J$.

Beweis: siehe lineare Algebra. $\square$

Lemma 6.9: Für Blockdiagonalmatrizen $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$

gilt $\exp(tJ) = \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(tJ_\ell) \end{pmatrix}$

Für k-Jordankästchen gilt $\exp\left(t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}\right) = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}t^2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

Beweis: wegen $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_e \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_e^k \end{pmatrix}$ folgt erste Aussage

da $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$ mit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ und $[t\lambda I, tN] = 0$

ist $\exp(tJ) = \exp(t\lambda I)\exp(tN) = e^{t\lambda}\exp(tN)$

außerdem ist $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ also $N^k = 0$

so dass $\exp(tN) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} N^m = I + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}N^{k-1}$ ∎

Durch Kombination von Lemma 6.8, Lemma 6.5, Satz 6.4 ergibt sich <u>Formel</u> für $W(t,\bar{t})$ wenn Jordanzerlegung zu A bekannt ist!

Restproblem: Jordanzerlegung oft nicht analytisch berechenbar

prinzipieller Zerlegungsalgorithmus: siehe Anleitung