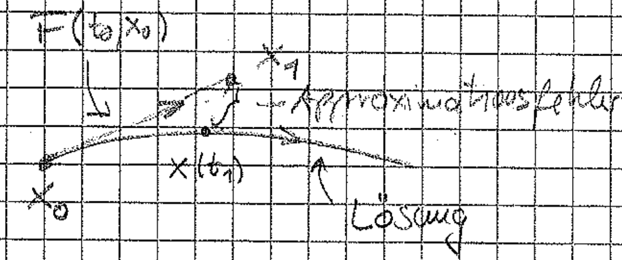
Kapitel 7 Satz von Peano

Lösungstheorie für $x'(t) = F(t, x(t))$ mit F <u>nur stetig</u>.

Grundidee: • konstruiere Folge approximativer Lsgen mit dem <u>expliziten Eulerverfahren</u>
• konvergente Teilfolge liefert Lösung der DGL

Eulersches Polygonzug Verfahren für AWP $x'(t) = F(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$



<u>Idee:</u> $x(\underbrace{t_0 + h}_{=:t_1}) = x(t_0) + h\,x'(t_0) + h^2 \cdot \text{Taylorrest}$
$= x_0 + h\,F(t_0, x_0) + h^2\,\text{Taylorrest}$

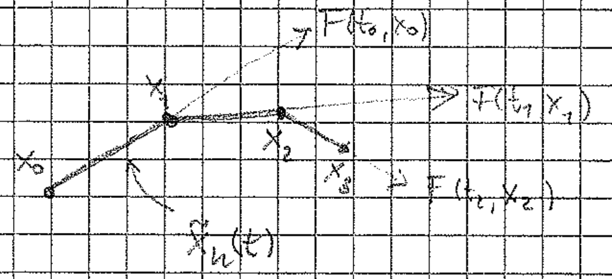
Approximation für $x(t_1)$: $x_1 = x_0 + h\,F(t_0, x_0)$

Wiederhole Idee für neues AWP: $x'(t) = F(t, x(t))$ $x(t_1) = x_1$

erhalte Folge $(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), \ldots$ mit $t_i = t_0 + ih$
$x_i \approx x(t_i)$

Verbinde Punkte zu Polygonzug (stückweise lineare Kurve)

$$x_h(t) = x_i + (t-t_i)\,F(t_i, x_i) \quad \text{falls } t \in [t_i, t_{i+1}]$$



generelle Voraussetzung an F

V1: Seien $\theta, T, M > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $D = [t_0, t_0+T] \times \overline{B_\theta(x_0)}$

$F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$, $\|F(t,x)\| \leq M$ für $t, x \in D$,

$T_0 = \min\{T, \theta/M\}$, $J = [t_0, t_0+T_0]$

Lemma 7.1: Es gelte V_1 und sei $h>0$. Dann ist

$(t, x_h(t)) \in D$ für $t \in J$ sowie

$\| x_h(t) - x_h(s) \| \leq M |t-s|$ für $t,s \in J$

Beweis:

Sei $i_{max} = \max \{ i \in \mathbb{N}_0 \mid ih \leq T_0 \}$

Es gilt $(t_i, x_i) \in D$ für $i \leq i_{max}$ mit Induktion $i=0$ ✓

Sind $(t_i, x_i) \in D$ für $i < i_{max}$ dann

$$\| x_{i+1} - x_0 \| = \| \sum_{j=0}^{i} x_{j+1} - x_j \| \leq \sum_{j=0}^{i} \| x_{j+1} - x_j \| = h \sum_{j=0}^{i} \| F(t_j, x_j) \| \leq h(i+1) M$$

$$\leq h\, i_{max} M \leq T_0 M \leq \frac{\theta}{M} M = \theta \qquad \text{also } x_{i+1} \in \overline{B_\theta(x_0)} \checkmark$$

für $i_{max} h \leq T_0 < (i_{max}+1) h$

gilt $x_h(t_0+T_0) = x_{i_{max}} + (t_0+T_0 - t_{i_{max}}) F(t_{i_{max}}, x_{i_{max}})$

also $\| x_h(t_0+T_0) - x_0 \| \leq \| x_h(t_0+T_0) - x_{i_{max}} \| + \| x_{i_{max}} - x_0 \| \leq (T_0 - i_{max} h) M + h i_{max} M = T_0 M \leq \theta$

Da $\overline{B_\delta(x_0)}$ konvex und $x_0, \ldots, x_{i_{max}}, x_h(b\tau_0) \in \overline{B_\delta(x_0)}$ ist

$x_h(t) \in \overline{B_\delta(x_0)}$ für alle $t \in J$

Außerdem gilt $\|x_h(t) - x_h(s)\| \leq M\,|t-s|$, $s, t \in [t_i, t_{i+1}h]$ $i \leq i_{max}$

und $\|x_{i+1} - x_i\| \leq hM$ $i \leq i_{max}$

mit Teleskopsumme + Dreiecksungleichung : $\|x_h(t) - x_h(s)\| \leq M \cdot |t-s|$ $t, s \in J$ ☒

x_h erfüllt fast die Integralgleichung :

Lemma 7.2: Unter den Voraussetzungen V1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $h_\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ so dass für jede Funktion $u \in C^0(J, \overline{B_\varrho(x_0)})$ mit $\|u - x_h\|_\infty < \delta$

$$\sup_{t \in J} \left\| u(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))\, ds \right\| \leq \varepsilon \quad \text{falls } h \leq h_\varepsilon$$

Beweis. Da F auf D glm stetig gibt es $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ mit $\|F(t,x) - F(s,y)\| < \frac{\varepsilon}{3T_0}$ falls $|t - s| \leq \delta$, $\|x - y\| \leq \delta$

Sei $h_\varepsilon = \min\{\delta, \delta/M\}$ und $h \leq h_\varepsilon$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\left\| x_h(t) - x_i - \int_{t_i}^{t} F(s, x_h(s))\, ds \right\| \leq \int_{t_i}^{t} \underbrace{\| F(t_i, x_i) - F(s, x_h(s)) \|}_{< \frac{\varepsilon}{3T_0}}\, ds \leq \frac{\varepsilon (t - t_i)}{3T_0}$$

denn $|t_i - s| < h_\varepsilon \leq \delta$
$\|x_h(s) - x_i\| \leq h_\varepsilon M \leq \delta$

$$\left\| x_h(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, x_h(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \left\| x_h(t) - x_i - \int_{t_i}^{t} F(s, x_h(s))\, ds \right\| + \sum_{j=0}^{i-1} \left\| x_{j+1} - x_j - \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(s, x_h(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3T_0}(t - t_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\varepsilon}{3T_0}(t_{j+1} - t_j) = \frac{\varepsilon}{3T_0}(t - t_0) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\| u(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s,u(s))\,ds \| \leq \underbrace{\| u(t) - x_n(t) \|}_{< \varepsilon/3} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\| F(s,u(s)) - F(s, x_n(s)) \|}_{< \frac{\varepsilon}{3T_0}} ds$$

$$+ \underbrace{\| x_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, x_n(s))\,ds \|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon$$

$\boxtimes$

Fehlt noch: Existenz einer konvergenten Teilfolge von $(x_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_n \to 0$.

Definition 7.3: Sei $J \subset \mathbb{R}$ kompakt, $A \subset C^0(J, \mathbb{R}^n)$ heißt <u>gleichgradig stetig</u>, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass <u>für alle</u> $f \in A$

$$\| f(x) - f(y) \| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |x - y| < \delta$$

Lemma 7.4: Unter Voraussetzung V1 ist $A = \{ x_h : J \to \mathbb{R}^n \mid h \in (0, 1] \}$ gleichgradig stetig und beschränkt in der Supremumsnorm

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\delta := \varepsilon / M$

$$\| x_h(t) - x_h(s) \| < M |t - s| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |t - s| < \delta \quad \text{unabh. von } h$$

außerdem: $\| x_h(t) \| \leq \| x_0 \| + \| x_h(t_0) - x_h(t) \| \leq \| x_0 \| + M |t - t_0|$

also $\sup_{t \in J} \| x_h(t) \| \leq \| x_0 \| + M T_0$ $\square$

Satz 7.5 (Arzelà - Ascoli)

Sei $J \subset \mathbb{R}$ kompakt, $A \subset X := C^0(J, \mathbb{R}^n)$ gleichgradig stetig und beschränkt in $(X, \|\cdot\|_\infty)$. Dann ist $\overline{A}$ kompakt in $(X, \|\cdot\|_\infty)$.

Beweisidee: $J \cap \mathbb{Q}$ ist abzählbar Elemente $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$

Sei (f_m) Folge in A zeige: (f_m) hat konvergente Teilfolge.

$(f_m(s_1))$ ist beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$, besitzt also konvergente TF $(f_{\sigma_1(k)}(s_1))_{k \in \mathbb{N}}$

$(f_{\sigma_1(k)}(s_2))$ — " — — " — $(f_{\sigma_2(k)}(s_2))$

$\vdots$

$$\begin{array}{lllll}
f_{\sigma_1(1)} & f_{\sigma_1(2)} & f_{\sigma_1(3)} & \ldots & \text{konvergiert in } s_1 \\
f_{\sigma_2(1)} & f_{\sigma_2(2)} & f_{\sigma_2(3)} & \ldots & \text{konvergiert in } s_1, s_2 \\
f_{\sigma_3(1)} & f_{\sigma_3(2)} & f_{\sigma_3(3)} & \ldots & \text{— " —} \quad s_1, s_2, s_3 \\
\vdots & \vdots & & &
\end{array}$$

Diagonalfolge $g_k := f_{\sigma_k(k)}$
konvergiert in allen Punkten s_i

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $\| u(t) - u(s) \| < \varepsilon$ falls $|t - s| < \delta$ für alle $u \in A$

Wähle $r_1, \dots, r_M \in J \cap \mathbb{Q}$ so dass für jedes $t \in J$ ein $i \in \{1, \dots, M\}$ existiert mit $|t - r_i| < \delta$.

Da $(g_k(r_1), \dots, g_k(r_M))$ konvergent in $(\mathbb{R}^n)^M$

gibt es $K \in \mathbb{N}$ mit $\| g_k(r_i) - g_l(r_i) \| < \varepsilon$ falls $l, k \geq K$

Sei $t \in J$ beliebig und $|t - r_i| < \delta$ und $l, k \geq K$

$$\| g_k(t) - g_l(t) \| \leq \| g_k(t) - g_k(r_i) \| + \| g_l(t) - g_l(r_i) \| + \| g_k(r_i) - g_l(r_i) \| < 3\varepsilon$$

also ist $\| g_k - g_l \|_\infty = \sup_{t \in J} \| g_k(t) - g_l(t) \| < 3\varepsilon$ $\quad l, k \geq K$

also (g_k) CF in $(X, \| \, \|_\infty)$ und damit konvergent ∎

Satz 7.6. (Peano)

Unter den Voraussetzungen V1 existiert mindestens eine Lösung des AWPs $x(t_0) = x_0$, $\forall t \in J: \dot{x}(t) = F(t, x(t))$

Beweis: Sei $h_m = 1/m$; $(x_{h_m})_{m \in \mathbb{N}}$ hat konvergente TF $y_k = x_{h_{m_k}}$ in $(C^0(J, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ (wegen Lemma 7.4 und Satz 7.5) mit Grenzwert $y \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$

zu $\varepsilon > 0$ gibt es h_ε, δ aus Lemma 7.2 und $K \in \mathbb{N}$ mit

$h_{m_k} < h_\varepsilon$ und $\|y_k - y\| < \delta$ für $k > K$.

dann $\sup_{t \in J} \| y(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds \| \le \varepsilon$

da $\varepsilon > 0$ beliebig: $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds$ d.h. y löst AWP auf J $\square$