Kapitel 8: Das Lemma von Gronwall – stetige Abhängigkeit

Lemma 8.1 (von Gronwall)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $v, \beta \in C^0(I, [0,\infty))$, $a \geq 0$, $I(t_0,t) = [\min(t_0,t), \max(t_0,t)]$ $t \in I$

gilt $\forall t \in I$: $v(t) \leq a + \int_{I(t_0,t)} \beta(s)\, v(s)\, ds$ "implizite Abschätzung von v"

so folgt $\forall t \in I$: $v(t) \leq a \exp\left(\int_{I(t_0,t)} \beta(s)\, ds\right)$ "explizite Abschätzung von v"

Beweis: 1) $a > 0$, $t \geq t_0$ Definiere $w(t) := a + \int_{t_0}^{t} \beta(s) v(s)\, ds$ HS: $w \in C^1$, $w > 0$

nach Vor.: $v(t) \leq w(t)$ $t \geq t_0$

$$\frac{d}{dt} \ln w(t) = \frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{\beta(t)\, v(t)}{w(t)} \leq \beta(t)$$

also $\ln w(t) - \ln w(t_0) \leq \int_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds$ also $w(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds\right)$

wegen $v(t) \leq w(t)$ folgt Beh.

2) $a > 0$, $t \leq t_0$ setze $t = 2t_0 - \tau$ $\tau \geq t_0$

dann $y(\tau) := v(2t_0 - \tau) \leq a + \int_{2t_0-\tau}^{t_0} \beta(s)\, v(s)\, ds \underset{\substack{2t_0-\sigma = s \\ \text{"} ds = -d\sigma \text{"}}}{=} a - \int_{\tau}^{t_0} \beta(2t_0 - \sigma)\, y(\sigma)\, d\sigma$

also $y(\tau) \leq a + \int_{t_0}^{\tau} \beta(2t_0 - \sigma)\, y(\sigma)\, d\sigma$ $\tau \geq t_0$

mit (1) $y(\tau) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} \beta(2t_0 - \sigma)\, d\sigma \right) \underset{2t_0 - \sigma = s}{=} a \exp\left(\int_{2t_0-\tau}^{t_0} \beta(s)\, ds \right)$

also $v(t) \leq a \exp\left(\int_t^{t_0} \beta(s)\, ds \right)$ ✓

3) $a = 0$ dann $v(t) \leq \int_{I(t_0,t)} \beta(s)\, v(s)\, ds \leq \varepsilon + \int_{I(t_0,t)} \beta(s)\, v(s)\, ds$ für $\varepsilon > 0$ beliebig

also $v(t) \leq \varepsilon \exp\left(\int_{I(t_0,t)} \beta(s)\, ds \right)$ mit $\varepsilon > 0$ beliebig

d.h. $v(t) \leq 0 = a \exp\left(\int_{I(t_0,t)} \beta(s)\, ds \right)$ ✓

$\boxtimes$

Anwendung 1: Eindeutigkeit

Satz 8.2. Sei $(t_0, x_0) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$, $u, v \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ mit $I \subset \mathbb{R}$ Intervall seien Lösungen des AWP $x(t_0) = x_0$, $x'(t) = F(t, x(t))$.
Erfüllt F die lokale Lipschitz-Bedingung, dann gilt $u = v$.

Beweis: Sei $A = \{t \in I \mid u(t) = v(t)\} \subset I$

wegen $t_0 \in A$ ist $A \neq \emptyset$ außerdem ist $A = \underbrace{(u-v)}_{\text{stetig}}^{-1}(\underset{\text{abg}}{\{0\}})$ abgeschlossen

! zeige A offen in I

Da I zusammenhängend folgt $A = I$

Sei $\bar{t} \in A$ und $\bar{x} = u(\bar{t}) = v(\bar{t})$

Da F lok. Lip in $(\bar{t}, \bar{x})$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$\|F(t,x) - F(t,y)\| < L\|x-y\|$ falls $|t-\bar{t}| < \varepsilon$ $x,y \in B_\varepsilon(\bar{x})$

Da u,v stetig gibt es $\delta > 0$ $u(t), v(t) \in B_\varepsilon(\bar{x})$ für $|t-\bar{t}| < \delta$ $t \in I$

$\tau := \min\{\delta, \varepsilon\}$

$$\|u(t) - v(t)\| = \|\bar{x} + \int_{\bar{t}}^{t} F(s,u(s))\,ds - \bar{x} - \int_{\bar{t}}^{t} F(s,v(s))\,ds\|$$

$$\leq \int_{I(\bar{t},t)} \|F(s,u(s)) - F(s,v(s))\|\,ds$$

$$\leq \int_{I(\bar{t},t)} L\,\|u(s) - v(s)\|\,ds \quad \text{falls } |t-\bar{t}| < \tau$$

Gronwall $u(t) = v(t)$ $|t - \bar{t}| < \tau$

also $I \cap (\bar{t} - \tau, \bar{t} + \tau) \subset A$ also A offen in I.

$\square$

Anwendung 2:

Lemma 8.3 (stetige Abhängigkeit von Anfangsdaten)

Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $t_0, t_1 \in I$, $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ erfülle globale Lipschitzbedingung mit Konstante L. Dann gilt für die Lösungen u, v der DGL $x'(t) = F(t, x(t))$ mit $u(t_0) = x_0$, $v(t_1) = x_1$

$$\|u - v\|_\infty = \sup_{t \in I} \|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|b-a|} \left(\|x_1 - x_0\| + M e^{L|t_0 - t_1|} |t_0 - t_1| \right)$$

wobei $M = \min(M_0, M_1)$, $M_i = \sup_{s \in I(t_0,t_1)} \|F(s, x_i)\|$

Beweis: sei oBdA $M = M_1$

$$\|u(t) - v(t)\| = \left\| u(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))\, ds - v(t_0) - \int_{t_0}^{t} F(s, v(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \|x_0 - v(t_0)\| + \int_{I(t,t_0)} \underbrace{\|F(s,u(s)) - F(s,v(s))\|}_{\leq L \|u(s) - v(s)\|}\, ds$$

Gronwall: $\|u(t) - v(t)\| \leq \|x_0 - v(t_0)\| \, e^{L|t-t_0|}$

außerdem $\|v(t) - x_1\| \leq \int_{t_1}^{t} \|F(s,v(s))\| ds \leq \underbrace{\int_{t_1}^{t} \|F(s,x_1)\| ds}_{\leq M_1 |t_0 - t_1|} + \int_{t_1}^{t} \underbrace{\|F(s,v(s)) - F(s,x_1)\|}_{\leq L \|v(s) - x_1\|} ds$

für $t \in I(t_1, t_0)$

Gronwall: $\|v(t_0) - x_1\| \leq M_1 |t_0 - t_1| e^{L|t_0 - t_1|}$

also $\|x_0 - v(t_0)\| \leq \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - v(t_0)\| \leq \|x_1 - x_0\| + M e^{L|t_0 - t_1|} |t_1 - t_0|$ ▨

Anwendung 3:

Lemma 8.4: (Stetige Abhängigkeit von Parametern)

Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$ offen, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^n \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$

erfülle Lip-Bedingung $\| F(t, x_1, \lambda_1) - F(t, x_2, \lambda_2) \| \le L (\|x_1 - x_2\| + \|\lambda_1 - \lambda_2\|)$

gleichmäßig in t. Dann gilt für die Lösungen u, v der AWPs

$u(t_0) = v(t_0) = x_0$, $\quad u'(t) = F(t, u(t), \lambda)$, $\quad v'(t) = F(t, v(t), \mu)$, dass

$$\sup_{t \in I} \|u(t) - v(t)\| \le L(b-a) e^{L(b-a)} \|\lambda - \mu\|$$

Beweis: $\|u(t) - v(t)\| \le \int_{I(t_0,t)} \| F(s, u(s), \lambda) - F(s, v(s), \mu) \| \, ds$

$$\le \underbrace{\int_{I(t_0,t)} L \|\lambda - \mu\| \, ds}_{\le a := L(b-a)\|\lambda - \mu\|} + \int_{I(t_0,t)} L \|u(s) - v(s)\| \, ds$$

$+$ Gronwall $\boxtimes$

ebenfalls mit Gronwall: Varianten zu Lemma 8.3, 8.4 mit <u>lokaler</u> Lip-Stetigkeit

zusätzliches technisches Problem: im Allgemeinen nur <u>lokale Lösungen</u>

Satz 8.5 (Maximales Existenzintervall)
+ Def

Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $(t_0, x_0) \in D$, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle lok. Lip.-Bedingung

Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ von $x(t_0) = x_0$, $x'(t) = F(t, x(t))$, wobei I in folgendem Sinn maximal ist:

Löst y das AWP auf einem offenen Intervall J, so gilt $J \subset I$ und $y = x|_J$

I ist eindeutig bestimmt und heißt <u>maximales Existenzintervall</u> $I_{max}(t_0, x_0)$ des AWPs und x heißt <u>maximale Lösung</u> (Bezeichnung: $x(t) = \Phi_{t, t_0}(x_0)$)

Beweis: $\mathcal{M} := \{ J \subset \mathbb{R} \mid J$ offenes Intervall und es gibt Lösung $x_J \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ des AWPs $\}$

Peano oder lok. Picard-Lindelöf: $\mathcal{M} \neq \emptyset$

Definiere $I := \bigcup \mathcal{M}$ I ist offen, $t_0 \in I$

Zu $t \in I$ gibt es $J \in \mathcal{M}$ mit $t \in J$, da $t_0 \in J$ folgt $\underbrace{[\min(t, t_0), \max(t, t_0)]}_{=: I(t, t_0)} \subset J \subset I$

also I wegzusammenhängend, also I Intervall

Zu $t \in I$ gibt es $J \in \mathcal{M}$ mit $t \in J$. Definiere $x(t) := x_J(t)$

unabhängig von Wahl von J, denn $t \in \tilde{J} \in \mathcal{M}$ dann lösen

x_J, $x_{\tilde{J}}$ AWP auf $I(t, t_0)$ Satz 8.2 $\Rightarrow$ $x_J = x_{\tilde{J}}$ auf $I(t, t_0)$

Damit $x_J(t) = x_{\tilde{J}}(t)$

Prüfe ob x Lösung des AWPs: $x(t_0) = x_J(t_0) = t_0$ für $J \in \mathcal{M}$

Sei $t \in I$ dann $t \in J$ für $J \in \mathcal{M}$ da J offen sogar $L = (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset J$

nach Def: $x = x_J$ auf L also x stetig diffbar in t

und $x'(t) = x_J'(t) = F(t, x_J(t)) = F(t, x(t))$

Maximalität: gäbe es größeres Intervall $M \supsetneq I$ mit den geforderten Eigenschaften, dann wäre $M \in \mathcal{M}$ also $M \subset I$ ↯ ☒

Lemma 8.6 Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle lok-Lip Bedingung. Ist $(t_0, x_0), (t, x) \in D$ und für $s \in I_{max}(t_0, x_0) \cap I_{max}(t, x)$ gilt $\Phi_{s,t}(x) = \Phi_{s,t_0}(x_0)$ dann ist $I_{max}(t_0, x_0) = I_{max}(t, x)$ und $\Phi_{s,t}(x) = \Phi_{s,t_0}(x_0)$ für alle $s \in I_{max}(t_0, x_0)$.

Beweis Übungen

Korollar 8.7 Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle lok-Lip Bedingung. Ist $(t_0, x_0) \in D$, $t, s \in I_{max}(t_0, x_0)$ dann ist $t \in I_{max}(s, \Phi_{s,t_0}(x_0))$ und

$$\Phi_{t,s}(\Phi_{s,t_0}(x_0)) = \Phi_{t,t_0}(x_0)$$

Beweis: Übungen

Lemma 8.8 Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle lok.-Lip Bedingung

Weiter sei $(t_0, x_0) \in D$, $t \in I_{max}(t_0, x_0)$ und $B = \overline{B_\alpha((t, \phi_{t,t_0}(x_0)))} \subset D$

für ein $\alpha > 0$. Dann ist $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \subset I_{max}(t_0, x_0)$ für

$\varepsilon = \alpha / M$ mit $M = \sup_{(s,y) \in B} \|F(s,y)\| + 1$

Beweis: $x := \phi_{t,t_0}(x_0)$ dann $(t, x) \in B \subset D$

Mit Satz von Peano existiert Lösung von $u'(s) = F(s, u(s))$, $u(t) = x$

im Intervall $[t, t + \varepsilon]$

$\Big[$ denn $F \in C^0(\underbrace{[t, t+\varepsilon] \times \overline{B_\alpha(x)}}_{E}, \mathbb{R}^n)$ $\|F(s,y)\| \leq M$ auf E

$\min\{\varepsilon, \frac{\alpha}{M}\} = \varepsilon$ $\Big]$

Definiere $G(s, y) = -F(2t - s, y)$

dann $G \in C^0(E, \mathbb{R}^n)$, $\|G(s,y)\| \leq M$ auf E

Peano liefert Lösung von $v'(s) = G(s, v(s))$ $v(t) = x$ im Intervall $[t, t+\varepsilon]$

beachte $u(s) = v(2t-s)$ erfüllt $u(t) = x$ und für $s \in [t-\varepsilon, t]$

$$u'(s) = -v'(2t-s) = -G(2t-s, v(2t-s))$$

$$= F(2t-(2t-s), u(s)) = F(s, u(s))$$

damit $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subset I_{max}(t, x)$

mit Lemma 8.6. wegen $\Phi_{t,t}(x) = \Phi_{t,t_0}(x_0)$

gilt $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subset I_{max}(t, x) = I_{max}(t_0, x_0)$ $\boxtimes$

Lemma 8.9 Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle lok-Lip Bedingung, sei $(t_0, x_0) \in D$ und sei $K \subset D$ kompakt. Dann existiert ein $\varepsilon_K > 0$ so dass wenn $t \in I_{max}(t_0, x_0)$ und $(t, \Phi_{t,t_0}(x_0)) \in K$ dann ist $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subset I_{max}(t_0, x_0)$.

Beweis: zu jedem Punkt $(t,x) \in K$ existiert $\alpha(t,x)$ so dass $\overline{B_{2\alpha(t,x)}(t,x)} \subset D$

Überdecke K mit $\{ B_{\alpha(t,x)}(t,x) \mid (t,x) \in K \}$

Sei $\{ B_{\alpha_i}(t_i, x_i) \mid i = 1, \dots, N \}$ endliche Teilüberdeckung

Sei $(t,x) \in K$ dann $(t,x) \in B_{\alpha_i}(t_i, x_i)$

also $\overline{B_{\alpha_i}(t,x)} \subset \overline{B_{2\alpha_i}(t_i, x_i)} \subset D$

Sei $\varepsilon := \min_{i=1}^{N} \alpha_i / M_i \qquad M_i := \sup_{(s,y) \in \overline{B_{2\alpha_i}(t_i, x_i)}} \| F(s,y) \| + 1$

Ist nun $t \in I_{max}(t_0, x_0)$, $x = \Phi_{t,t_0}(x_0)$ und $(t,x) \in K$

dann ist $\overline{B_{\alpha_i}(t,x)} \subset \overline{B_{2\alpha_i}(t_i, x_i)} \subset D$ für ein i und nach Lemma 8.

$[t-\varepsilon_i, t+\varepsilon_i] \subset I_{max}(t_0, x_0)$ mit $\varepsilon_i = \dfrac{\alpha_i}{\sup_{(s,y) \in \overline{B_{\alpha_i}(t,x)}} \| F(s,y) \| + 1} \geq \dfrac{\alpha_i}{M_i} \geq \varepsilon$ $\square$

Sei für $t_1 \approx t_0$, $x_1 \approx x_0$

$u(t) = \Phi_{t,t_0}(x_0)$ $t \in I_{max}(t_0,x_0)$

$v(s) = \Phi_{s,t_1}(x_1)$ $s \in I_{max}(t_1,x_1)$

direkter Vergleich i.d.R. nicht möglich, evtl. sogar $I(t_0,x_0) \cap I(t_1,x_1) = \emptyset$

hier helfen Lemma 8.10, 8.11

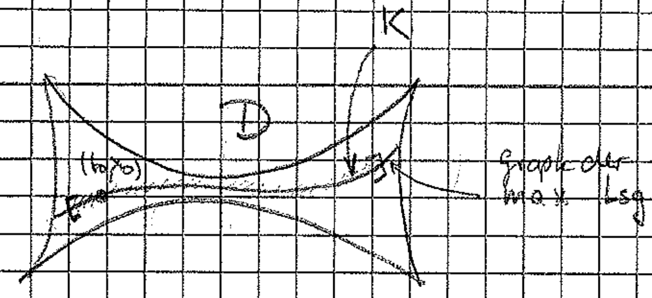
Lemma 8.10: Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $(t_0,x_0) \in D$, $F \in C^0(D,\mathbb{R}^n)$ erfülle lok. Lip-Bedingung.

Sei weiter $J \subset I_{max}(t_0,x_0)$ kompakt und $K = \{(t, \Phi_{t,t_0}(x_0)) \mid t \in J\}$

Dann existiert $\varepsilon > 0$ so dass $K_\varepsilon = K + B_\varepsilon(0) \subset D$ und ein L mit

$\| F(t,x) - F(t,y) \| \leq L \|x - y\|$ für alle $(t,x),(t,y) \in K_\varepsilon$

Beweis: $t \mapsto (t, \Phi_{t,t_0}(x_0))$ stetig auf J

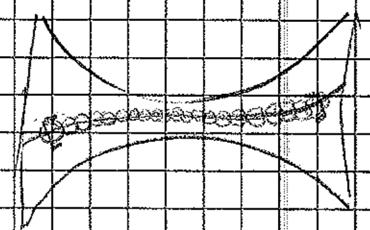


also ist $K \subset D$ kompakt

da F lok.-Lip: zu jedem $z \in K$ existiert $\delta_z > 0$ mit $B_{4\delta_z}(z) \subset D$ und lok Lip Konstante L_z

$\{ B_{\delta_z}(z) \mid z \in K \}$ offene Überdeckung von K

wähle endliche Teilüberdeckung mit $B_i = B_{\delta_{z_i}}(z_i)$ $i = 1, .., N$ aus



Setze $\delta := \min_{i=1}^{N} \delta_{z_i}$

Sei $(t,x) \in K + B_\delta(0)$. Dann gibt es $(s,y) \in K$ mit $(t,x) \in B_\delta(s,y)$

zu (s,y) gibt es i mit $(s,y) \in B_i$ also $\|(t,x) - z_i\| < \delta + \delta_{z_i} < 2\delta_{z_i}$

also $(t,x) \in B_{2\delta_{z_i}}(z_i)$ d.h. $K + B_\delta(0) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{2\delta_{z_i}}(z_i)$

d.h. $\overline{K + B_\delta(0)} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \overline{B_{2\delta_{z_i}}(z_i)} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{4\delta_{z_i}}(z_i) \subset D$

Seien $(t,x), (t,y) \in \overline{K + B_\varepsilon(0)}$ mit $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{\delta, \frac{\delta}{M}\}$, $M = \sup\limits_{(t,x)\in \overline{K+B_\delta(0)}} \|F(t,x)\| + 1$

kompakt

dann gibt es $(\sigma, \phi_{\sigma,t_0}(x_0)), (\tau, \phi_{\tau,t_0}(x_0)) \in K$

mit $\|(t,x) - (\sigma, \phi_{\sigma,t_0}(x_0))\| < \varepsilon$, $\|(t,y) - (\tau, \phi_{\tau,t_0}(x_0))\| < \varepsilon$

$$\|\phi_{\tau,t_0}(x_0) - \phi_{\sigma,t_0}(x_0)\| \leq \int_{I(\tau,\sigma)} \|F(\eta, \phi_{\eta,t_0}(x_0))\| d\eta \leq M|\tau - \sigma| < \delta$$

wegen $|t-\sigma| < \varepsilon$, $|t-\tau| < \varepsilon$ ist $|\sigma - \tau| < 2\varepsilon \leq \delta/M$

damit $\|(t,x) - (t,y)\| = \|x-y\| \leq \|x - \phi_{\sigma,t_0}(\sigma)\| + \|y - \phi_{\tau,t_0}(x_0)\| + \|\phi_{\tau,t_0}(x_0) - \phi_{\sigma,t_0}(x_0)\|$

$< 2\varepsilon + \delta < 2\delta$

zu $(\sigma, \phi_{\sigma,t_0}(x_0)) \in K$ gibt es i mit $\|(\sigma, \phi_{\sigma,t_0}(x_0)) - z_i\| < \delta_{z_i}$

also $\|(t,x) - z_i\| < \delta_i + \varepsilon < 4\delta_i$

$\|(t,y) - z_i\| < 2\delta + \delta_i + \varepsilon < 4\delta_i$

mit $L = \max\limits_{i=1}^{N} L_{z_i}$ ist $\|F(t,x) - F(t,y)\| \leq L_{z_i}\|x-y\| \leq L\|x-y\|$ ▨

Satz 8.11 Sei $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $(t_0, x_0) \in D$, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle lok.-Lip Bedingung.
Weiter sei $J \subset I_{max}(t_0, x_0)$ kompakt mit $t_0 \in J$ und $K = \{(t, \phi_{t,t_0}(x_0)) \mid t \in J\}$.
Dann gibt es $\varepsilon, \delta > 0$ und I kompakt mit $J \subset I$ sowie $L, M > 0$ so dass für alle $(t,x) \in B_\delta(t_0, x_0)$ gilt:

a) $t \in \mathring{I}$

b) $I \subset I_{max}(t, x)$

c) $\Phi_{I,t}(x) \subset K_\varepsilon = \overline{K + B_\varepsilon(0)} \subset D$

d) $\|F(s,y_1) - F(s,y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \qquad (s,y_1), (s,y_2) \in K_\varepsilon$

e) $\|F(s,y)\| \leq M \qquad (s,y) \in K_\varepsilon$

f) $\|\phi_{s,t}(x) - \phi_{s,t_0}(x_0)\| \leq e^{L|s-t_0|}\left(\|x - x_0\| + e^{L|t-t_0|} M |t - t_0|\right) \qquad s \in I$

Beweis: Mit Lemma 8.9 gibt es $\varepsilon > 0$ so dass auf $K_\varepsilon = \overline{K + B_\varepsilon(0)} \subset D$ (d) gilt.
da K_ε kompakt und F stetig gilt (e)
$\tau \in \partial J$ sind innere Punkte von $I_{max}(t_0, x_0)$
da $s \longmapsto (s, \phi_{s,t_0}(x_0)) = g(s)$ stetig in τ gibt es $\eta > 0$
mit $(\tau - \eta, \tau + \eta) \subset g^{-1}(B_{\varepsilon/4}(\tau, \phi_{\tau,t_0}(x_0))) \subset I_{max}(t_0, x_0)$ für beide $\tau \in \partial J$

Setze $\tilde{I} = J + [-\eta/2, \eta/2]$ dann $\tilde{I} \subset I_{max}(t_0, x_0)$

Weiter sei $\delta > 0$ so klein, dass $\delta < \eta/2$, $e^{L|\tilde{I}|}(1 + M e^{L\delta})\delta < \varepsilon/2$ (insbes. folgt $\delta < \varepsilon/2$)

$\max \tilde{I} - \min \tilde{I}$

Schließlich sei $(t, x) \in B_\delta(t_0, x_0)$ beliebig

da $t_0 \in J$ und $|t - t_0| < \delta < \eta/2$ ist $t \in \mathring{\tilde{I}}$ ✓

Sei $U := \{ s \in \tilde{I} \mid I(t,s) \subset I_{max}(t,x), (\tau, \phi_{\tau,t}(x)) \in K_\varepsilon$ für alle $\tau \in I(t,s) \}$

wegen $t \in U$ ist $U \neq \emptyset$

sei $\tau \in U$ also $r \mapsto (r, \phi_{r,t}(x)) \in K_\varepsilon$ für alle $r \in I(t,\tau) \subset I_{max}(t,x)$

außerdem $\tau \in \tilde{I}$ so dass $I(t_0, \tau) \subset I_{max}(t_0, x_0)$

Wie im Beweis von Lemma 8.3 folgt:

$$\sup_{r \in I(t,\tau)} \| \phi_{r,t}(x) - \phi_{r,t_0}(x_0) \| \leq e^{L|\tilde{I}|} \Big(\underbrace{\|x - x_0\|}_{< \delta} + \underbrace{\sup_{s \in I(t,t_0)} \|F(s, x_0)\|}_{\leq M} e^{L|t-t_0|} \underbrace{|t - t_0|}_{< \delta} \Big) < \varepsilon/2$$

da $I(t, t_0) \subset (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

also $\|\Phi_{\tau,t_0}(x_0) - \Phi_{\tau,t}(x)\| < \varepsilon/2$

Da $g(s) = (s, \Phi_{s,t}(x))$ stetig in τ

gibt es $\gamma > 0$ so dass $g(s) \in B_{\varepsilon/4}(\tau, \Phi_{\tau,t}(x))$ für $s \in (\tau-\gamma, \tau+\gamma)$

insbesondere: $\|g(s) - \Phi_{\tau,t_0}(x_0)\| \leq \|g(s) - \underbrace{\Phi_{\tau,t}(x)}_{g(\tau)}\| + \|\Phi_{\tau,t}(x) - \Phi_{\tau,t_0}(x_0)\| < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 < \varepsilon$

d.h. $g(s) \in K_\varepsilon$ für $s \in (\tau-\gamma, \tau+\gamma)$

also $s \in U$ für $s \in (\tau-\gamma, \tau+\gamma) \cap I$ d.h. U ist offen in I.

Sei (s_n) Folge in U mit $s_n \to s$

Nach Lemma 8.9 existiert zu $K_\varepsilon \subset D$ kompakt ein $\lambda > 0$

mit $[s_n - \lambda, s_n + \lambda] \subset I_{max}(t, x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

da $(s_n, \Phi_{s_n,t}(x)) \in K_\varepsilon$. Wegen $s_n \to s$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s| < \lambda$ $n \geq N$.

Damit $s \in I_{max}(t, x)$ und da K_ε abgeschlossen ist $(s, \Phi_{s,t}(x)) \in K_\varepsilon$.

Da auch I abgeschlossen ist $s \in I$, $I(t,s) \subset I_{max}(t,x)$, $(\tau, \Phi_{\tau,t}(x)) \subset K_\varepsilon$

also U abgeschlossen in I d.h. $U = I \Rightarrow$ (b), (c) ✓ für $\tau \in I(s,t)$

(f) folgt durch Wiederholung des Beweises von Lemma 8.3 ∎

Verallgemeinerung auf Parameterabhängigkeit ...

Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ offen, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle lok-Lip

Bedingung: zu jedem $(t, x, \lambda) \in D$ existiert Umgebung U und Konstante L mit

$\forall (s, x_1, \lambda_1), (s, x_2, \lambda_2) \in U: \| F(s, x_1, \lambda_1) - F(s, x_2, \lambda_2) \| \leq L (\| x_1 - x_2 \| + \| \lambda_1 - \lambda_2 \|)$

Trick! $\quad u := (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+p} \quad \tilde{F}(t, u) := (F(t, x, \lambda), 0) \in \mathbb{R}^{n+p}$ Trick!

$$u'(t) = \tilde{F}(t, u(t)), \quad u(t_0) = (x_0, \lambda_0)$$

Lösung $\quad u(t) = (x(t), \lambda_0)$

erfüllt $\quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t) = F(t, x(t), \lambda)$

wende Satz 8.11 auf $\tilde{F}$ an

$$\| \tilde{\Phi}_{s,t}(x, \lambda) - \tilde{\Phi}_{s,t_0}(x_0, \lambda_0) \| \leq e^{\tilde{L}|s - t_0|} \left(\| (x, \lambda) - (x_0, \lambda_0) \| + \tilde{M} e^{|t - t_0|} |t - t_0| \right)$$

$$\leq e^{\tilde{L}|s - t_0|} \left(\| x - x_0 \| + \| \lambda - \lambda_0 \| + \tilde{M} e^{|t - t_0|} |t - t_0| \right)$$

$$\| \Phi^{\lambda}_{s,t}(x) - \Phi^{\lambda_0}_{s,t_0}(x_0) \| \leq \max\{ \| \Phi^{\lambda}_{s,t}(x) - \Phi^{\lambda_0}_{s,t_0}(x_0) \| , \| \lambda - \lambda_0 \| \}$$

Fluss zu $F(\cdot,\cdot,\lambda)$

$$= \| \tilde{\Phi}_{s,t}(x,\lambda) - \tilde{\Phi}_{s,t_0}(x_0,\lambda_0) \|$$

$$\leq e^{\tilde{L}|s-t_0|} \left(\|x - x_0\| + \|\lambda - \lambda_0\| + \tilde{M} e^{|t-t_0|} |t-t_0| \right)$$

Stetige Abhängigkeit von Parametern folgt aus stetiger Abhängigkeit von Anfangsdaten.