Kapitel 9: Differenzierbare Abhängigkeit

Satz 9.1: Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ und $(t,x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} F(t,x)$ sei stetig in D.
Dann erfüllt F die lok.-Lip Bedingung und für $(t_0, x_0) \in D$, $t \in J_{max}(t_0, x_0)$
ist $x \mapsto \Phi_{t,t_0}(x)$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung $J_{t,t_0}(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Die Ableitung erfüllt das AWP

$$M'(t) = A(t) M(t), \quad M(t_0) = I$$

wobei $A_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(t, \Phi_{t,t_0}(x_0))$

Beweis - Anmerkungen:

Sei $(t,x) \in D$. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $B = \overline{S_\delta(t,x)} \subset D$

Sei $(s,x_1), (s,x_2) \in B$

dann $\| F(s,x_2) - F(s,x_1) \| = \| g(1) - g(0) \| = \| \int_0^1 g'(z)\, dz \| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n \| \frac{\partial}{\partial x_i} F(s, x_1 + z(x_2 - x_1)) \| dz \, \|x_1 - x_2\| \leq L$ wegen Stetigkeit auf B

$g(z) = F(s, x_1 + z(x_2 - x_1))$; $g'(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F(s, x_1 + z(x_2 - x_1)) \, (x_2 - x_1)_i$

Also ist F lok.-Lip !

Mit Satz 8.11. ist für h genügend klein

$$I(t_0, t) \subset I \subset I_{max}(t_0, x_0) \cap I_{max}(t_0, x_0 + h)$$ ... alle betrachteten Trajektorien bleiben in Streifen K_ε ...

$$\phi_{t,t_0}(x_0+h) - \phi_{t,t_0}(x_0) - J_{t,t_0}(x_0)\,h$$

$$= x_0 + h + \int_{t_0}^{t} F(s, \phi_{s,t_0}(x_0+h))\,ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, \phi_{s,t_0}(x_0))\,ds - h - \int_{t_0}^{t} A(s)\, J_{s,t_0}(x_0)\,h\,ds$$

x-Ableitung

$$= \int_{t_0}^{t} F(s, \phi_{s,t_0}(x_0+h)) - F(s, \phi_{s,t_0}(x_0)) - F'(s, \phi_{s,t_0}(x_0))\, J_{s,t_0}(x_0)\,h\,ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} \int_0^1 F'(s, \phi_{s,t_0}(x_0) + \tau(\phi_{s,t_0}(x_0+h) - \phi_{s,t_0}(x_0)))\,d\tau\,(\phi_{s,t_0}(x_0+h) - \phi_{s,t_0}(x_0) - J_{s,t_0}(x_0)\,h)$$

$$+ \int_0^1 (F'(s, \phi_{s,t_0}(x_0) + \tau(\phi_{s,t_0}(x_0+h) - \phi_{s,t_0}(x_0))) - F'(s, \phi_{s,t_0}(x_0)))\, J_{s,t_0}(x_0)\,h\,d\tau$$

$$v_h(t) = \frac{\| \Phi_{t,t_0}(x_0+h) - \Phi_{t,t_0}(x_0) - J_{t,t_0}(x_0)\, h \|}{\|h\|}$$

erfüllt $\quad v_h(t) \leq a_h + \int_{I(t_0,t)} \beta_h(s)\, v(s)\, ds$

Gronwall $\quad v_h(t) \leq \underbrace{a_h}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} \exp\left(\int_{I(t_0,t)} \beta_h(s)\, ds \right)$

glm beschränkt bzgl h

Integralterme abschätzen
glm Stetigkeit auf K_ε ausnutzen ...

Damit folgt Diffbarkeit

$\boxed{}$

Merkregel:

$X(t) = \Phi_{t,t_0}(y)$ erfüllt $X'(t) = F(t, X(t))$, $x(t_0) = y$

d.h. $\frac{d}{dt}\Phi_{t,t_0}(y) = F(t, \Phi_{t,t_0}(y))$, $\Phi_{t_0,t_0}(y) = y$

Ableiten nach y_i: $\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{d}{dt}\Phi_{t,t_0}(y) = F'(t, \Phi_{t,t_0}(y))\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi_{t,t_0}(y)$, $\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi_{t_0,t_0}(y) = e_i$

Vertauschen (mit Satz 9.1) $\overset{\shortparallel}{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi_{t,t_0}(y)}$

partielle Ableitungen als Spalten von $M(t) = J_{t,t_0}(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\Phi_{t,t_0}(y) \cdots \frac{\partial}{\partial y_n}\Phi_{t,t_0}(y)\right)$

liefert $\frac{d}{dt}M(t) = A(t)M(t)$, $M(t_0) = (e_1 \cdots e_n) = \underline{I}$

Ableitung nach Anfangszeit mit Autonomisierungstrick!

$$y(t) = (t, x(t)) \qquad y'(t) = (1, F(t, x(t))) = G(y(t)) \qquad y(0) = (t_0, x_0)$$

verwandelt in Ableitung nach Anfangswert.

Ableitung nach Parametern mit Parametertrick

$$y(t) = (\lambda, x(t)) \qquad y'(t) = (0, F(t, x(t), \lambda)) = G(t, y(t)) \qquad y(t_0) = (\lambda_0, x(t_0))$$

verwandelt in Ableitung nach Anfangswert konkret: $\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{d}{dt}\phi^\lambda_{t,t_0}(y) = \frac{\partial}{\partial t_0} F(t, \phi^\lambda_{t,t_0}(y))$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t_0}\phi^\lambda_{t,t_0}(y)}_{z(t)} = \underbrace{F'(t, \phi^\lambda_{t,t_0}(y))}_{A(t)}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t_0}\phi^\lambda_{t,t_0}(y)}_{z(t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\phi^\lambda_{t_0,t_0}(y) = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\phi^\lambda_{t,t_0}(y)\Big|_{t=t_0} + \frac{\partial}{\partial t_0}\phi^\lambda_{t,t_0}(y)\Big|_{t=t_0}$$

$$= F(t_0, \underbrace{\phi^\lambda_{t_0,t_0}(y)}_{=y}) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t_0}\phi^\lambda_{t,t_0}(y)\Big|_{t=t_0}}_{z(t_0)}$$

also $\quad z'(t) = A(t)\,z(t) \qquad z(t_0) = -F(t_0, y)$

dann $\quad z(t) = \frac{\partial}{\partial t_0}\phi^\lambda_{t,t_0}(y)$

entsprechend: $\quad z'(t) = A(t)\,z(t) + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(t, z(t), \lambda) \qquad z(t_0) = 0$

dann $\quad z(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\phi^\lambda_{t,t_0}(y)$