Kapitel 10 Stabilität

Definition 10.1 Eine Lösung x des Anfangswertproblems $x'(t) = F(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ heißt <u>stabil</u>, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen y des AWPs $y'(t) = F(t, y(t))$ $y(t_0) = y_0$ mit $\|x_0 - y_0\| < \delta$ gilt:

$$\sup_{t \in [t_0, \infty)} \|x(t) - y(t)\|_\infty < \varepsilon$$

Die Lösung heißt <u>instabil</u>, wenn sie nicht stabil ist.
Sie heißt <u>asymptotisch stabil</u>, falls sie stabil ist und falls für y wie oben zusätzlich gilt $\lim_{t \to \infty} \|x(t) - y(t)\|_\infty = 0$.

Wir betrachten Stabilität zunächst bei linearen Systemen

Satz 10.2 Sei $I = [t_0, \infty)$, $A \in C^0(I, \mathbb{C}^{n \times n})$, $b \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$

Die Lösung von $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ ist stabil/instabil/asympt. stabil genau dann, wenn die Lösung $u(t) = 0$ von $u'(t) = A(t)u(t)$, $u(t_0) = 0$ die entsprechende Eigenschaft hat

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ zugeh. Radius zur Stabilitätseigenschaft von x.

Sei $\|v_0\| < \delta$ und v Lösung von $v'(t) = A(t)v(t)$, $v(t_0) = v_0$

Dann ist $y(t) = x(t) + v(t)$ Lösung von $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$, $y(t_0) = x_0 + v_0$

also $\sup\limits_{t \geq t_0} \|y(t) - x(t)\| < \varepsilon$ da $\|y(t_0) - x_0\| = \|v_0\| < \delta$

also $\sup\limits_{t \geq t_0} \|v(t) - \underset{=0}{u(t)}\| < \varepsilon$ wenn $\|v_0 - \underset{=0}{u_0}\| < \delta$ $\Rightarrow$ $u(t) = 0$ stabil

alle anderen Teilaussagen entsprechend ∎

Im Fall konstanter Koeffizienten $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Lemma 10.3: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist die Nulllösung genau dann

a) asymptotisch stabil wenn $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^- = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0 \}$

b) stabil wenn $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{C}^-}$ und $\operatorname{ind}(\lambda) = 1$ für $\lambda \in \sigma(A) \cap \partial\mathbb{C}^-$

c) instabil sonst

Index = Dimension des größten Jordankästchen zu λ

Beweisidee nutze Jordansche Normalform und

$$e^{\lambda t} P(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad \text{wenn } \operatorname{Re}\lambda < 0$$

Polynom

bzw $|e^{\lambda t} P(t)| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ wenn $\operatorname{Re}\lambda > 0$ oder $\operatorname{Re}\lambda = 0$ $\deg P \geq 1$

um zu zeigen dass $\|\exp(tA)\| \to 0$ im Fall (a)

$\|\exp(tA)\| \leq C$ im Fall (b)

$\|\exp(tA)\| \to \infty$ im Fall (c)

$\boxtimes$

nächster Schritt: Stabilität von Gleichgewichtslösungen

betrachte (*) $x'(t) = F(x(t))$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt singulärer Punkt von F wenn $F(\bar{x}) = 0$

Dann ist $x(t) = \bar{x}$ $t \geq 0$ (Gleichgewichts-) Lösung von (*)

Entsprechend Def 10.1 nennt man $\bar{x}$ stabiles/instabiles/asympt. stabiles Gleichgewicht

Lineare Stabilitätsanalyse:

in der Nähe von $\bar{x}$ gilt $F(x) = \underset{\overset{!!}{0}}{F(\bar{x})} + \underbrace{F'(\bar{x})}_{A \in \mathbb{R}^{n \times n}}(x - \bar{x}) + \text{Rest}$ ← sehr klein wenn $(x - \bar{x})$ klein

Sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$ $\varepsilon > 0$ sehr klein und

u Lösung von $u'(t) = A\,u(t)$ $u(0) = u_0$

dann erfüllt $y = \bar{x} + \varepsilon u$ $y'(t) = \varepsilon u'(t) = \varepsilon A\,u(t) = A(y(t) - \bar{x}) = F(\bar{x}) + F'(\bar{x})(y(t) - \bar{x})$

$\approx F(y(t))$ solange εu sehr klein insbes.: $\sigma(F'(\bar{x})) \subset \mathbb{C}^-$ $\rightsquigarrow$ $u \to 0$

$\sigma(F'(\bar{x})) \subset \overline{\mathbb{C}^-}$ und $\operatorname{ind}(\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \sigma(F'(\bar{x})) \cap \mathbb{C}^-$ $\rightsquigarrow$ u beschr. $\rightsquigarrow$ εu bleibt klein

sonst $u \to \infty$ $\rightsquigarrow$ εu verlässt Nähe von $\bar{x}$

$\rightsquigarrow$ Linearisierung bricht zusammen

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1' &= (\alpha - \beta x_2)\, x_1 && \text{Beute} \\ x_2' &= \underbrace{(-\gamma + \delta x_1)\, x_2}_{F(x)}, && \text{Räuber} \end{aligned}$$

kritische Punkte $\{(0,0),\ (\gamma/\delta,\ \alpha/\beta)\}$

alle ausgerottet — perfekt balanciert

kleine Störung: zB Einsetzen von wenigen Tieren — zB: Bejagen einer oder beider Populationen

langfristige Konsequenz? $\hat{=}$ Frage nach Stabilität

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta x_2 & -\beta x_1 \\ \delta x_2 & -\gamma + \delta x_1 \end{pmatrix}$$

$\bar{x} = (0,0)$: $F'(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$

<u>instabil</u> da $\lambda \in \mathbb{C}^+$
wenige Beutetiere werden sich rasch vermehren während wenige Räuber wegen anfänglicher Knappheit noch abnehmen

$\bar{x} = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ $F'(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta\gamma/\delta \\ \frac{\alpha}{\beta}\delta & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \sigma(F'(x)) = \{-i\sqrt{\alpha\gamma}, +i\sqrt{\alpha\gamma}\}$ linearisiertes Problem ist stabil aber nicht asymptotisch stabil

leichtes Bewegen eines Systems im Gleichgewicht führt zu oszillierender aber beschränkter Störung

Eine strikte Untersuchung der Stabilität im nicht linearen Fall geht mit

Definition 10.4: Sei $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ein isolierter singulärer Punkt von $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ D offen. Dann heißt $L \in C^1(U(x_0), \mathbb{R})$, $U(x_0) \subset D$ Umgebung von x_0, eine <u>Ljapunow-Funktion</u> zur autonomen DGL $x'(t) = F(x(t))$ am Punkt x_0, falls gilt

1) $L(x) \geq 0$ und $L(x) = 0$ nur in $x = x_0$

2) Es gilt $\nabla L(x) \cdot F(x) \leq 0 \qquad x \in U(x_0)$

Satz 10.5 Sei $x_0 = 0$ isolierter singulärer Punkt von $F \in C(D, \mathbb{R}^n)$, D offen. Existiert eine Ljapunow-Funktion L zur autonomen DGL $x'(t) = F(x(t))$ am Punkt x_0, so ist die konstante Lösung $x(t) = 0$ stabil

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es $\varepsilon_0 > 0$ und Ljapunow-Fkt $L \in C^1(B_{\varepsilon_0}(0), \mathbb{R})$.

Sei $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ und $m := \frac{1}{2} \min\limits_{\|x\| = \varepsilon} L(x) > 0$

Stetigkeit von L: es gibt $0 < \delta < \varepsilon$ mit $L(x) < m$ für $\|x\| < \delta$

Sei $x \in C^1([0, \infty), D)$ Lösung von $x' = F(x)$ mit $\|x(0)\| < \delta$ d.h. $L(x(0)) < m$

Sei $I = \{ t \in [0,\infty) \mid \|x(s)\| < \varepsilon$ für alle $s \in [0,t] \}$

Klar $0 \in I$ und I offen in $[0,\infty)$ wegen Stetigkeit von x,
fehlt noch: I abgeschlossen.
Sei $(t_n) \subset I$ $\quad t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$ in $\mathbb{R}$

wegen $\frac{d}{ds} L(x(s)) = \nabla L(x(s)) \cdot x'(s) = \nabla L(x(s)) \cdot F(x(s)) \leq 0$ für $s \leq t_n$

und $L(x(0)) < m$ ist $L(x(t_n)) < m$ und daher $L(x(t)) \leq m$, $\|x(t)\| \leq \varepsilon$

wäre $\|x(t)\| = \varepsilon$ dann $L(x(t)) \leq \underbrace{\min_{\|y\|=\varepsilon} L(y)}$ $\lightning$ also $\|x(t)\| < \varepsilon$ d.h. $t \in I$ $\blacksquare$

Beispiele in <u>Hamilton-Systemen</u> (Mechanik) $\quad \left.\begin{aligned} p' &= -\nabla_q H(p,q) \\ q' &= \nabla_p H(q,p) \end{aligned}\right\} \quad x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \nabla_p H \\ -\nabla_q H \end{pmatrix}$

erfüllt (die "Energie") H die Bedingung

$$\nabla H \cdot F = \nabla_q H \cdot \nabla_p H + \nabla_p H \cdot (-\nabla_q H) = 0$$

Ist in $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$ auch Vorzeichenbedingung erfüllt, liefert diese Struktur eine Ljapunow Funktion prinzipiell: Ljapunow-Funktion zu finden ist oft schwierig ...

weiteres Beispiel Räuber-Beute Modell ist nach Variablentransformationen

$p = \ln(\delta x_1)$, $q = \ln(\beta x_2)$ ein Hamiltonsystem mit

$$H(p,q) = \alpha(\ln\alpha - q) + \gamma(\ln\gamma - p) + e^q - \alpha + e^p - \gamma$$

H erfüllt Vorzeichenbedingung wegen strikter <u>Konvexität</u>

$\Rightarrow$ Gleichgewichtspunkt $(q,p) = (\ln\alpha, \ln\gamma)$

$\Updownarrow$

$(x_1, x_2) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ ist <u>stabil</u>