Kapitel 1 Maßkonstruktion

Definition 1.1 Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{A}$ heißt <u>Ring</u>, falls

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

gilt zusätzlich zu i) ii) iii) $X \in \mathcal{A}$ so heißt $\mathcal{A}$ <u>Algebra</u>

gilt zusätzlich $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ so heißt $\mathcal{A}$ <u>σ-Algebra</u>

Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ heißt <u>Inhalt</u> auf einem Ring $\mathcal{A}$

falls i) $\mu(\emptyset) = 0$ ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ wenn $A \cap B = \emptyset$

gilt zusätzlich für alle Folgen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ $i \neq j$

und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$, dass $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ so heißt μ <u>σ-additiv</u>

μ heißt <u>σ-endlich</u> falls es eine Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gibt mit

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = X$ und $\mu(A_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$

μ heißt **endlich**, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Einen σ-additiven Inhalt auf einer σ-Algebra nennt man auch **Maß**

Beispiel: 1) $\mathcal{A}$ Ring auf X, $\bar{x} \in X$

$$\delta_{\bar{x}}(A) := \begin{cases} 1 & \bar{x} \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \mathbb{1}_A(\bar{x}) \quad \text{ist endlicher Inhalt „Dirac-Maß"}$$

klar $\delta_{\bar{x}}(\emptyset) = 0$;

allgemein gilt $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$

wenn $A \cap B = \emptyset$ folgt $\delta_{\bar{x}}(A \cup B) = \mathbb{1}_{A \cup B}(\bar{x}) = \mathbb{1}_A(\bar{x}) + \mathbb{1}_B(\bar{x}) = \delta_{\bar{x}}(A) + \delta_{\bar{x}}(B)$

außerdem: $\delta_{\bar{x}}$ σ-endlich und σ-additiv (Übung)

2) Sind $\mu_1, \dots, \mu_n$ Inhalte auf $\mathcal{A}$ und $c_1, \dots, c_n \geq 0$ dann

ist auch $\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i$ definiert durch $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i(A)$ Inhalt auf $\mathcal{A}$

Sind alle μ_i endlich / σ-endlich / σ-additiv dann ist μ endlich / σ-endlich / σ-additiv

(Übung)

3) $\mathbb{I} = \{ (a,b] \mid a,b \in \mathbb{R} \}$

$$\mathbb{A} = \{ A \subset \mathbb{R} \mid A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k ,\ n \in \mathbb{N},\ I_1, \dots, I_n \in \mathbb{I} \}$$

Abkürzung für $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ und $I_k \cap I_j = \emptyset \quad k \neq j$

Lemma 1.2 $\mathbb{A}$ ist ein Ring

Beweis: $\emptyset = (1,0] \in \mathbb{I} \subset \mathbb{A}$ ✓

$A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k$, $B = \dot{\bigcup}_{l=1}^{m} J_l$ zeige $A \setminus B \in \mathbb{A}$ per Induktion über m

$m = 0$ $\quad A \setminus \emptyset = A \in \mathbb{A}$ ✓

Ind-Annahme

Schritt: $A \setminus B = A \cap B^c = A \cap J_1^c \cap \dots \cap J_m^c = \Big(A \setminus \dot{\bigcup}_{l=1}^{m-1} J_l\Big) \setminus J_m = \underset{\mathbb{A}}{\underset{\cap}{\tilde{A}}} \setminus \underset{(a,b]}{\underset{\shortparallel}{J_m}}$ oBdA $a<b$ sonst schon fertig

$$= \dot{\bigcup}_{k=1}^{N} \tilde{I}_k \cap J_m^c = \dot{\bigcup}_{k=1}^{N} \underbrace{\tilde{I}_k \cap (-\infty, a]}_{\hat{I}_{2k+1} \in \mathbb{I}} \ \dot{\cup}\ \underbrace{\tilde{I}_k \cap (b, \infty)}_{\hat{I}_{2k} \in \mathbb{I}}$$

$$= \dot{\bigcup}_{k=1}^{2N} \hat{I}_k \in \mathbb{A}$$

$A \cup B \in \mathbb{A}$ per Induktion über m

$m = 0$: $A \cup \emptyset = A \in \mathbb{A}$ ✓

$$A \cup B = \left(A \cup \dot{\bigcup}_{l=1}^{m-1} J_l\right) \cup J_l \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ind. Ann}}}{=} \tilde{A} \cup J_l = \tilde{A} \,\dot{\cup}\, \underbrace{(J_l \setminus \tilde{A})}_{\in \mathbb{A}} = \dot{\bigcup}_{k=1}^{N} \tilde{I}_k \cup \dot{\bigcup}_{r=1}^{M} \tilde{J}_r \in \mathbb{A}$$

$\tilde{J}_r \subset J_l \setminus \tilde{A} \subset \tilde{A}^c$

also $\tilde{J}_r \cap \tilde{I}_k = \emptyset$

Lemma 1.3 Durch $\lambda((a,b]) := (b-a)^+$ $a, b \in \mathbb{R}$ ▨

und $\lambda\left(\dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k\right) := \sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k)$ $I_1, \dots, I_n \in \mathbb{I}$ wird ein endlicher und σ-endlicher Inhalt auf $\mathbb{A}$ definiert

Beweis: Zu zeigen: λ ist Funktion (eindeutige Zuordnungsvorschrift)

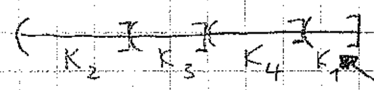
Problem: $C \in \mathbb{A}$ kann unterschiedliche Darstellung

$C = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k = \dot{\bigcup}_{l=1}^{m} J_l$ haben; zu klären $\sum \lambda(I_k) = \sum \lambda(J_l)$

ansonsten: $\sum \lambda(I_k)$ endlich und $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n]$, $\lambda((-n,n]) = 2n$

$$\text{Da } I_k \subset C: \sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k \cap C) = \sum_{k=1}^{n} \lambda\left(\dot{\bigcup}_{l=1}^{m} I_k \cap J_l\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \lambda(I_k \cap J_l) = \sum_{l=1}^{m} \lambda\left(\dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k \cap J_l\right) = \sum_{l=1}^{m} \lambda(J_l)$$

per Induktion $I =: \dot{\bigcup}_{r=1}^{N} K_r$ $I, K_r \in \mathbb{I}$



erfüllt $\lambda(I) = \sum \lambda(K_r)$ ▨

Trick: spalte K_r mit $\max K_r = \max I$ ab.

Satz 1.4 (Carathéodory)

Sei λ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$. Genau dann existiert ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu_{|\mathcal{R}} = \lambda$ wenn λ σ-endlich ist.

Beweisskizze aufgespalten in mehrere Schritte:

Notwendigkeit der σ-Additivität: Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ und $\dot\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$. Ist μ Fortsetzung von λ, dann

$$\lambda(\dot\bigcup A_i) = \mu(\dot\bigcup A_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \mu \text{ Maß also } \sigma\text{-additiv}}}{=} \sum \mu(A_i) = \sum \lambda(A_i)$$ also λ σ-additiv.

Erinnerung: $\sigma(\mathcal{R}) = \bigcap\limits_{A \in \Sigma(\mathcal{R})} A$ kleinste σ-Algebra die $\mathcal{R}$ enthält

$\Sigma(\mathcal{R})$: alle σ-Algebren, die $\mathcal{R}$ enthalten

Lemma 1.5 (Charakterisierung der σ-Additivität)

Sei λ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$. Dann gilt (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) wobei

a) λ ist σ-additiv

b) für alle aufsteigenden Mengenfolgen $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ mit $A_n \in \mathcal{R}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =: \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{R}$

gilt $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(\lim_{n\to\infty} A_n)$

c) für alle absteigenden Mengenfolgen $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ mit $A_n \in \mathcal{R}$, $\lambda(A_1) < \infty$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n =: \lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$

gilt $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(\lim_{n\to\infty} A_n) = 0$

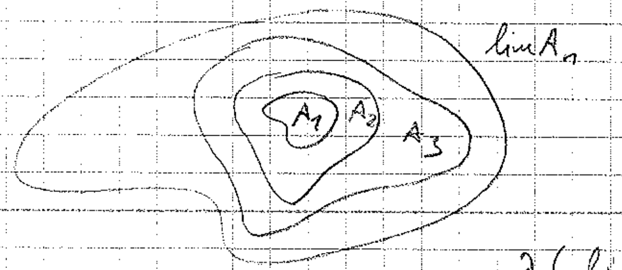
Ist λ endlich, so sind (a), (b), (c) äquivalent.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b)

zerlege A_k in disjunkte Ringmengen D_i

$D_1 = A_1$

$D_{k+1} = A_{k+1} \setminus A_k$



dann $A_k = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} D_i$ und $\lim A_n = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} D_n$

$$\lambda(\lim A_n) = \lambda(\dot{\bigcup} D_n) \underset{\sigma\text{-additiv}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(D_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(D_k) \underset{\lambda \text{ Inhalt}}{=} \lim_{n\to\infty} \lambda(\dot{\bigcup}_{k=1}^{n} D_k) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$$

(b) $\Rightarrow$ (a) sei $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \in \mathcal{R}$

$\quad$ sei $\underset{\mathcal{R}}{\cap}$

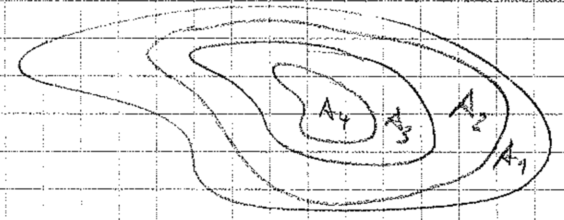
setze $B_n = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k$ dann $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ $\lim B_n = A$

also $\lambda(A) = \lambda(\lim B_n) \underset{\uparrow (b)}{=} \lim \lambda(B_n) \underset{\uparrow \text{Inhalt}}{=} \lim \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$ also (a)

(b) $\Rightarrow$ (c) $B_n = A_1 \setminus A_n$

ist aufsteigend

mit $\lim B_n = A_1$



also $\lambda(A_1) \underset{\uparrow (b)}{=} \lim \lambda(A_1 \setminus A_n)$ und $\lambda(A_1) = \lambda(A_n \dot{\cup} A_1 \setminus A_n) = \lambda(A_n) + \lambda(A_1 \setminus A_n) \geq \lambda(A_n)$

also $\lambda(A_n) < \infty$

$= \lambda(A_1) - \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$ und $\lambda(A_1 \setminus A_n) = \lambda(A_1) - \lambda(A_n)$

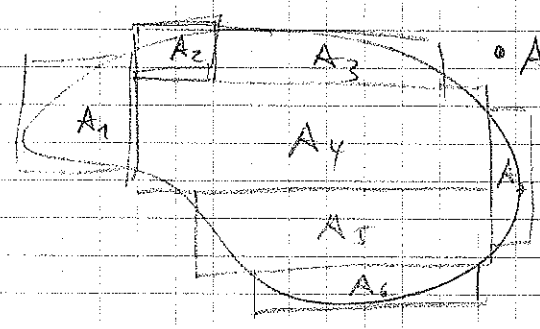
$\Rightarrow \lim \lambda(A_n) = 0$ also (c)

(c) $\Rightarrow$ (b) wenn λ endlich A_n aufsteigend dann $B_n = (\lim A_n) \setminus A_n$ absteigend

mit $\lambda(B_1) < \infty$ (da λ endlich) und $\lim B_n = \emptyset$ also

$\lim \lambda(B_n) = \lambda(\lim B_n) = \lambda(\emptyset) = 0$ wegen $\lambda(B_n) = \lambda(\lim A_n) - \lambda(A_n)$ folgt (b) $\boxtimes$

Grundidee für Maßfortsetzung



- $A \subset X$ beliebige Menge
- überdecke A mit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$
- $\sum \lambda(A_n)$ obere Schranke für "Inhalt" von A
- wähle kleinste obere Schranke als "Inhalt" von A

also zu $A \in \mathcal{P}(X)$: $\mathcal{U}_A := \{ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R} \mid A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \}$ alle Überdeckungen

$$\lambda^*(A) := \inf \{ \sum \lambda(A_n) \mid (A_n) \in \mathcal{U}_A \} \qquad (\text{beachte } \inf \emptyset := \infty)$$

Definition 1.6: Sei X eine Menge. $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ heißt <u>äußeres Maß</u>, wenn

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$ (ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ iii) $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$

Eine Menge $A \subset X$ heißt <u>μ^*-messbar</u>, falls

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \quad \text{für alle } B \subset X$$

Lemma 1.7 Sei $\mathcal{R}$ Ring über X, λ σ-additiver Inhalt auf $\mathcal{R}$

Dann ist λ^* ein äußeres Maß und jedes $A \in \mathcal{R}$ ist λ^* messbar

mit $\lambda^*(A) = \lambda(A)$.

Beweistricks ... Ausführung = Übung

$\lambda^*(\emptyset) = 0$, $A \subseteq B \Rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ mit Def λ^*

$\lambda^*(\bigcup A_n) \leq \sum \lambda^*(A_n)$, Fall alle $\lambda(A_n) < \infty$

dann gibt es $(A_{nm})_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{A_n}$

mit $\sum_m \lambda(A_{nm}) < \lambda^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n}$ (Def "inf")

Trick: schreibe A_{nm} als Folge $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$

wie beim Abzählen von $\mathbb{Q}$

und nutze $(C_k) \in \mathcal{U}_A$

(1,1) (2,1) (3,1) (4,1) (5,1) ...
(1,2) (2,2) (3,2) (4,2) (5,2) ...
(1,3) (2,3)
etc

Sei $A \in \mathcal{R}$

$\lambda^*(A) \leq \lambda(A)$ mit Def λ^*

$D_1 = A_1;\ D_{k+1} = A_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

$\lambda(A) \leq \lambda^*(A)$ mit σ-Additivität: $(A_n) \in \mathcal{U}_A$ $A = A \cap \bigcup A_n = A \cap \dot{\bigcup} D_n = \dot{\bigcup} \underbrace{A \cap D_n}_{\subseteq A_n}$

Messbarkeit von A: 1) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots = B \Rightarrow \lambda^*(B) \leq \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B)$

2) für $\lambda^*(B) < \infty$, $(B_n) \in \mathcal{U}_B$ ist $B_n \cap A \in \mathcal{U}_{B \cap A}$ $B_n \cap A^c \in \mathcal{U}_{B \cap A^c}$ $\boxtimes$

Lemma 1.8 Sei μ^* ein äußeres Maß auf X
Dann ist die Menge aller μ^*-messbaren Mengen eine σ-Algebra $\mathcal{A}$
und $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ ein Maß

Beweis

$\mathcal{A} = \{ A \subset X \mid A \ \mu^*\text{-messbar} \}$ $\emptyset \in \mathcal{A}$ da $\mu^*(B) = \underbrace{\mu^*(B \cap \emptyset)}_{=0} + \mu^*(\underbrace{B \cap \emptyset^c}_{=B})$ $B \subset X$

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A^c) + \mu^*(B \cap \underbrace{(A^c)^c}_{=A})$ $B \subset X$

also $A^c \in \mathcal{A}$.

$A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ $\mu^*(B) = \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap B)$

$= \mu^*(A_2 \cap A_1 \cap B) + \mu^*(A_2^c \cap A_1 \cap B) + \mu^*(A_2 \cap A_1^c \cap B) + \mu^*(A_2^c \cap A_1^c \cap B)$

mit $(A_1 \cup A_2) \cap B$ anstelle von B; nutze $A_2 \cap (A_1 \cup A_2) = A_2$, $A_1 \cap (A_1 \cup A_2) = A_1$, $A_2^c \cap A_1^c = (A_1 \cup A_2)^c$

(*) $\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) = \mu^*(A_1 \cap A_2 \cap B) + \mu^*(A_2^c \cap A_1 \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap A_2 \cap B)$

damit $\mu^*(B) = \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap B)$ $B \subset X$

also $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ also $\mathcal{A}$ Algebra ($A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$)

induktiv $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$ wenn $A_i \in \mathcal{A}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ mit (*) $\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) = \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_2 \cap B)$

$\Rightarrow A_1^c \cap A_2 = A_2$

$A_2^c \cap A_1 = A_1$ induktiv $\mu^*(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i \cap B)$

$\mu^*(B) = \mu^*(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i \cap B) + \mu^*(\underbrace{(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i)^c}_{\cup\, A^c} \cap B)$ da $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$, $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$

$\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i \cap B) + \mu^*(A \cap B)$

also: $\mu^*(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)$

Da μ^* subadditiv, $\mu^*(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \cap B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B)$

insgesamt $\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)$

also überall $=$ statt $\leq$ da $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$

d.h. $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ wenn $A_i \in \mathcal{A}$ und μ^* σ-subadditiv

und $\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(\underbrace{A_i \cap A}_{= A_i}) + \mu^*(\underbrace{A^c \cap A_i}_{= \emptyset})$ μ^* σ-additiv

$(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ beliebig schreibe $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} D_i$ $D_1 = A_1$, $D_{k+1} = A_{k+1} \setminus \bigcup A_k \in \mathcal{A}$

$\mu^*(B) = \mu^*(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} D_i \cap B) + \mu^*((\dot{\bigcup} D_i)^c \cap B) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B) + \mu^*((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c \cap B) \Rightarrow \mathcal{A}$ σ-Algebra ☒

Beweis von Satz 1.4. (hinreichender Teil)

λ σ-additiver Inhalt $\underset{\text{Lemma 1.7}}{\Longrightarrow}$ λ^* äußeres Maß und $\lambda^*|_{\mathcal{R}} = \lambda$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$\lambda^*|_{\mathcal{A}}$ Maß auf $\mathcal{A}$ $\quad$ $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}$

also $\mu := \lambda^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ Maß mit $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$ $\boxtimes$