Kapitel 2: Vergleich von Maßen

Situation: μ, ν Maße auf $\sigma(\mathcal{E})$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{E}$

Wann gilt $\mu = \nu$ auf $\sigma(\mathcal{E})$?

Grundidee: $\mathcal{A} := \{ A \in \sigma(\mathcal{E}) \mid \mu(A) = \nu(A) \}$

klar: $\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{E})$ zeige $\mathcal{A}$ σ-Algebra, dann folgt $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$

$\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$ ✓

Sei $A \in \mathcal{A}$ $\quad \mu(A^c) = \mu(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(A)$ wenn $\mu(A) < \infty$

$A^c \in \mathcal{A} \Leftarrow \quad \nu(A^c) = \nu(X \setminus A) = \mu(X) - \nu(A)$ wenn $\mu(X) = \nu(X)$

Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ p.w.d. $\quad \mu(\dot\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i) = \sum \nu(A_i) = \nu(\dot\bigcup A_i) \Rightarrow \dot\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

fehlt noch ... allgemeine abzählbare Vereinigungen

Definition 2.1: Sei X eine Menge. $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt <u>Dynkin-System</u>, falls

i) $\emptyset \in \mathcal{D}$ ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$ iii) $(A_n) \subset \mathcal{D}$ pwd $\Rightarrow \dot{\bigcup} A_n \in \mathcal{D}$

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \bigcap \{ \tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{P}(X) \mid \tilde{\mathcal{D}}$ Dynkin-System und $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{D}} \}$

Schließlich heißt ein Mengensystem $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, wenn $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$.

Lemma 2.2: a) Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra wenn es $\cap$-stabil ist.

b) Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil. Dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$

Beweis: a) $\mathcal{D}$ σ-Algebra $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ $\cap$-stabiles Dynkin-System ✓

sei $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cup B = (\underbrace{\overset{\in \mathcal{D}}{A^c} \cap \overset{\in \mathcal{D}}{B^c}}_{\in \mathcal{D}})^c \in \mathcal{D}$ $(A_n) \subset \mathcal{D}$ $D_1 = A_1 \in \mathcal{D}$

$D_{k+1} = A_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_{k+1} \cap \underbrace{\overbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c}^{\in \mathcal{D}}}_{\in \mathcal{D}} \in \mathcal{D}$

also $\bigcup A_i = \dot{\bigcup} D_i \in \mathcal{D}$ damit $\mathcal{D}$ σ-Algebra ✓

b) nach Def von $\mathcal{D}(\mathcal{E})$: $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$ Dynkin-System, das $\mathcal{E}$ enthält

zeige noch $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ σ-Algebra; dann $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$

dazu zeige $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ist $\cap$-stabil zu $A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ sei $\mathcal{D}_A := \{ B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \mid A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \}$

klar: $\emptyset \in \mathcal{D}_A$, $B \in \mathcal{D}_A \Rightarrow A \cap B^c = A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c = \big(\overbrace{\underset{\mathcal{D}(\mathcal{E})}{A^c} \,\dot\cup\, \underset{\mathcal{D}(\mathcal{E})}{(A \cap B)}}^{\in \mathcal{D}(\mathcal{E})} \big)^c \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

also $B^c \in \mathcal{D}_A$

schließlich $(B_i) \subset \mathcal{D}_A$ pwd $A \cap (\dot\bigcup B_i) = \dot\bigcup A \cap B_i \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ also $\dot\bigcup B_i \in \mathcal{D}_A$

wenn $A \in \mathcal{E}$ dann $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_A$ also $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_A$ also $A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ für alle $B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

also $B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \Rightarrow \forall A \in \mathcal{E}: A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

also $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_B$ für alle $B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

also $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_B$ für alle $B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

also $B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \Rightarrow \forall A \in \mathcal{D}(\mathcal{E}): A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ dh. $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil $\boxtimes$

Satz 2.3: Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil und μ, ν seien endliche Maße auf $\sigma(\mathcal{E})$ mit $\mu(X) = \nu(X)$ sowie $\mu(E) = \nu(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Dann gilt $\mu = \nu$.

Beweis: Einfangsargument zeigt $\mathcal{E} \subset \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dynkin System}}}{\mathcal{A}} \subset \sigma(\mathcal{E})$ also $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ also $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ ☒

Erweiterung auf σ-endliche Maße mit

Lemma 2.4. Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ und eine Menge $S \in \mathcal{P}(X)$ bezeichnen wir $\mathcal{E}|_S = \{ E \cap S \mid E \in \mathcal{E} \}$. Ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil und $S \in \mathcal{E}$ so gilt $\sigma(\mathcal{E}|_S) = \sigma(\mathcal{E})|_S$

Beweis: A II Def 16.11: $\sigma(\mathcal{E})|_S$ ist <u>Spur-σ-Algebra</u>

wegen $\mathcal{E}|_S \subset \sigma(\mathcal{E})|_S$ ist $\sigma(\mathcal{E}|_S) \subset \sigma(\mathcal{E})|_S$

setze $\mathcal{A} = \{ B \in \sigma(\mathcal{E}) \mid B \cap S \in \sigma(\mathcal{E}|_S) \}$

dann $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, $\emptyset \in \mathcal{A}$, $(B_i) \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup B_i \in \mathcal{A}$

und $B \in \mathcal{A}$ dann $B^c \cap S = S \setminus (B \cap S) = \underset{\in \sigma(\mathcal{E}|_S)}{S} \cap \underbrace{(B \cap S)}_{\in \sigma(\mathcal{E}|_S)}{}^c \in \sigma(\mathcal{E}|_S)$

also $B^c \in \mathcal{A}$ d.h. $\mathcal{A}$ σ-Algebra

also $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ d.h. $\sigma(\mathcal{E})|_S \subset \sigma(\mathcal{E}|_S)$ ☒

Satz 2.5. Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil und seien μ, ν Maße auf $\sigma(\mathcal{E})$ mit $\mu(E) = \nu(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Enthält $\mathcal{E}$ eine aufsteigende Folge (S_n) mit $\bigcup S_n = X$ und $\mu(S_n) < \infty$ für alle n, dann ist $\mu = \nu$.

Beweis: Mit Satz 2.3 ist $\mu|_{\sigma(\mathcal{E}|_{S_n})} = \nu|_{\sigma(\mathcal{E}|_{S_n})}$ d.h. für $A \in \sigma(\mathcal{E})$

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_n S_n \cap A\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 1.5} \\ \sigma\text{-additiv}}}{=} \lim \mu(\underbrace{S_n \cap A}_{\in \sigma(\mathcal{E})|_{S_n} = \sigma(\mathcal{E}|_{S_n})}) = \lim \nu(S_n \cap A) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-additiv}}}{=} \nu\Big(\bigcup S_n \cap A\Big) = \nu(A) \quad \boxtimes$$

Korollar 2.6. Sei λ ein σ-additiver und σ-endlicher Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$. Dann ist die Maßfortsetzung im Satz von Carathéodory eindeutig.

Beweis: Ringe sind $\cap$-stabil: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

da λ σ-endlich gibt es $(A_i) \subset \mathcal{R}$ mit $\bigcup A_i = X$, $\lambda(A_i) < \infty$

setze $S_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{R}$. Dann $\lambda(S_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) < \infty$ und $\bigcup S_n = X$ $\boxtimes$

wichtiger Spezialfall: Verteilungsfunktionen

$\mathbb{H} := \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist $\cap$-stabil

beachte $\sigma(\mathbb{H}) = \sigma(\mathbb{I})$

denn $(a,b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a] \in \sigma(\mathbb{H})$ also $\mathbb{I} \subset \sigma(\mathbb{H})$ also $\sigma(\mathbb{I}) \subset \sigma(\mathbb{H})$

$(-\infty, a] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, a] \in \sigma(\mathbb{I})$ also $\mathbb{H} \subset \sigma(\mathbb{I})$ also $\sigma(\mathbb{H}) \subset \sigma(\mathbb{I})$

Korollar und Definition 2.7 Sei μ ein endliches Maß auf $\sigma(\mathbb{H})$. Dann heißt $F(x) := \mu((-\infty, x])$ die Verteilungsfunktion von μ. Ist ν ein weiteres endliches Maß auf $\sigma(\mathbb{H})$ mit gleicher <u>Verteilungsfunktion</u>, dann gilt $\mu = \nu$

Beweis μ, ν stimmen auf $\mathbb{H}$ überein $\therefore$ Satz 2.3 $\square$

Das Gleiche funktioniert mit $\mathbb{H}_n = \{(-\infty, x] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n] \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ auf $\sigma(\mathbb{H}_n)$