# Kapitel 3: Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$

Wir haben schon Inhalt $\lambda$ auf Ring $\mathbb{A}$ mit $\lambda((a,b]) = b-a$ falls $b \geq a$

außerdem ist $\lambda$ endlich und $\sigma$-endlich "Intervalllänge"

Nach Korollar 2.6 gäbe es genau eine Maß-fortsetzung auf $\sigma(\mathbb{A})$ falls $\lambda$ $\sigma$-additiv ist ... das sog. Lebesgue-Maß

Lemma 3.1. Der Inhalt $\lambda$ auf $\mathbb{A}$ ist $\sigma$-additiv.

Beweis: Idee: nutze (c) $\Rightarrow$ (a) in Lemma 1.5

sowie Intervallschachtelungslemma (A.II)

$K_1 \supset K_2 \supset \dots$ absteigende Folge kompakter Mengen mit $\bigcap K_n = \emptyset$

Dann gibt es $N$ mit $K_n = \emptyset$ für $n \geq N$.

sowie Approximationstrick: zu $A \in \mathbb{A}$ und $\varepsilon > 0$ existiert $A^\varepsilon \in \mathbb{A}$

mit $\overline{A^\varepsilon} \subset A$ und $\lambda(A) - \lambda(A^\varepsilon) < \varepsilon$

dazu $A \in \mathbb{A}$ hat form $A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k$ $\quad I_k = (a_k, b_k]$ $\quad a_k < b_k$

mit $I_k^\varepsilon := (a_k, b_k - \varepsilon]$ ist $\lambda(I_k) - \lambda(I_k^\varepsilon) < \varepsilon$ und $\overline{I_k^\varepsilon} \subset I_k$

und $A^\varepsilon := \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k^{\varepsilon/n}$ , $\lambda(A) - \lambda(A^\varepsilon) < n \cdot \varepsilon/n = \varepsilon$ und $\overline{A^\varepsilon} \subset A$

Sei $(A_n)$ absteigende Folge in $\mathbb{A}$ mit $\bigcap A_n = \emptyset$

Sei $\varepsilon > 0$, $B_n = A_n^{2^{-n}\varepsilon}$ und $C_n = B_1 \cap \ldots \cap B_n \in \mathbb{A}$ sowie $K_n = \overline{B}_1 \cap \ldots \cap \overline{B}_n$ kompakt

beachte $C_n \subset K_n \subset B_n \subset A_n$, per Def: $C_n, K_n$ absteigend und $\bigcap K_n \subset \bigcap A_n = \emptyset$

außerdem: $\lambda(A_n) = \lambda(C_n) + \lambda(A_n \setminus C_n) = \lambda(A_n \setminus C_n)$ für $n \geq N$ da $C_n \subset K_n = \emptyset$ für $n \geq N$

und $\lambda(A_n \setminus C_n) = \lambda(A_n \setminus (B_1 \cap \ldots \cap B_n)) = \lambda(A_n \setminus B_1 \cup A_n \setminus B_2 \ldots \cup A_n \setminus B_n)$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_n \setminus B_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k \setminus B_k) < \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\varepsilon \underset{\text{geom. Reihe}}{\leq} \varepsilon\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = \varepsilon$$

also $\lambda(A_n) \leq \varepsilon$ für $n \geq N$ d.h. $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$

Mit Lemma 1.5 folgt Beh. ∎

Lemma 3.2 Es gilt $\sigma(\mathbb{I}) = \sigma(\mathbb{A})$.

Beweis: $\mathbb{I} \subset \mathbb{A} \subset \sigma(\mathbb{A}) \Rightarrow \sigma(\mathbb{I}) \subset \sigma(\mathbb{A})$

$\mathbb{A} \subset \sigma(\mathbb{I}) \Rightarrow \sigma(\mathbb{A}) \subset \sigma(\mathbb{I})$ $\blacksquare$

noch weitere Darstellungen von $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{I}) = \sigma(\mathbb{H})$ mit

Definition 3.3. Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum

Dann heißt $\mathcal{B}(X) := \sigma(\tau)$ die <u>Borel $\sigma$-Algebra</u> auf $X$

Lemma 3.4. Sei $(X, d)$ metrischer Raum mit einer abzählbaren <u>dichten</u> Teilmenge $E$

(d.h. zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $e \in E$ mit $d(x,e) < \varepsilon$)

Sei weiter $\mathcal{K} = \{ B_r(e) \mid r \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty),\ e \in E \}$ Dann ist

$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{K})$.

Beweis: Topologie von $(X,d)$ ist $\tau = \{ U \subset X \mid U \text{ offen} \}$

klar $\mathcal{K} \subset \tau \subset \sigma(\tau) = \mathcal{B}(X)$ also $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}(X)$

fehlt noch $\tau \subset \sigma(\mathcal{K})$

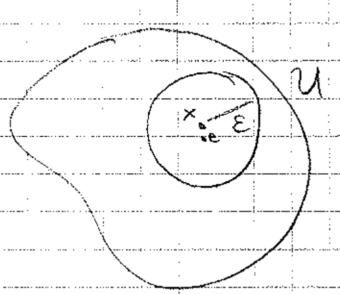
Nun ist $\mathbb{Q} \cap (0,\infty) = \{ r_1, r_2, r_3, \dots \}$ abzählbar

$E = \{ e_1, e_2, \dots \}$ abzählbar

damit $\mathcal{K} = \{ B_{r_i}(e_j) \mid i,j \in \mathbb{N} \}$ abzählbar

$$\begin{array}{llll} (1,1) & (2,1) & (3,1) & \dots \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & \dots \\ (1,3) & \dots & & \end{array}$$

Sei $U \in \tau$ und $x \in U$



$\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U$

da $E$ dicht gibt es zu $\varepsilon/4$ $e_k \in E$ mit $d(e_k, x) < \varepsilon/4$

und $r_i \in \mathbb{Q}$ mit $d(e_k, x) < r_i < \varepsilon/4$

also $x \in B_{r_i}(e_k) \subset B_{\varepsilon/4}(e_k) \subset B_{\varepsilon/2}(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$

also $U = \bigcup \{ B \mid B \in \mathcal{K}, B \subset U \} \in \sigma(\mathcal{K})$ (abz. Vereinigung) $\square$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ steht für Borel-$\sigma$-Algebra zur Norm-Topologie auf $\mathbb{R}^n$

mit $\mathbb{I}_n = \{ (a,b] := (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] \mid a, b \in \mathbb{R}^n \}$ n-dim halboffene Intervalle

gilt

Lemma 3.5 $\quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathbb{I}_n)$

Beweis: $\quad (a, b] = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{(a, b + \tfrac{1}{m} \underset{(1,1,\dots,1)}{e})}_{\text{offen, also in } \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \overset{\text{de Morgan}}{=} \Big( \underbrace{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{(a, b + \tfrac{1}{m} e)^c}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \Big)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ also $\mathbb{I}_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$\Downarrow$

$\sigma(\mathbb{I}_n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

umgekehrt $\quad B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon e, x + \varepsilon e)$ in $\|\cdot\|_\infty$-Norm

$$= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{(x - \varepsilon e, x + (\varepsilon + \tfrac{1}{m}) e]}_{\in \mathbb{I}_n} \in \sigma(\mathbb{I}_n)$$

mit $\quad E = \mathbb{Q}^n$ abzählbar, dicht in $\mathbb{R}^n$

gilt also $\quad \mathcal{K} = \{ B_r(e) \mid r \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty), e \in E \} \subset \sigma(\mathbb{I}_n) \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathbb{I}_n)$

$\blacksquare$

mit Lemma 3.1, 3.2, 3.4, Satz 1.4, Korollar 2.6 folgt Existenz einer <u>eindeutige</u> Fortsetzung von $\lambda : \mathbb{I} \to (0, \infty)$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Definition 3.6. Die eindeutige Fortsetzung der Intervalllänge $\lambda : \mathcal{I} \to [0, \infty)$ zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ heißt das <u>Lebesgue-Maß</u> auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und wird wieder mit $\lambda$ bezeichnet.

Bem: Offensichtlich ist $\lambda$ $\sigma$-endlich aber nicht endlich da $\lambda((-n, n]) = 2n$.