Kapitel 4 Messbare Funktionen

Definition 4.1. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Dann heißt $(X, \mathcal{A})$ <u>Messraum</u> und die Elemente von $\mathcal{A}$ nennt man <u>messbare Mengen</u>. Ist $(Y, \mathcal{B})$ ein weiterer Messraum und $f: X \to Y$, dann heißt f <u>messbar von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$</u> (kurz <u>messbar</u>, wenn $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ offensichtlich), wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$, d.h. wenn alle Urbilder messbarer Mengen messbar sind.
In der W-Theorie nennt man messbare Mengen auch <u>Ereignisse</u> und messbare Funktionen <u>Zufallsvariablen</u>.

Beispiel $f(x) = c \in Y$ (konstante Funktion)

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} X & c \in B \\ \emptyset & c \notin B \end{cases} \quad \text{also} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \text{ für alle } B \in \mathcal{B}$$

$\rightsquigarrow$ konstante Funktionen sind messbar

Beispiel: $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ ist messbar von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$(\mathbb{1}_A)^{-1}(B) = \begin{cases} A & 1 \in B,\ 0 \notin B \\ A^c & 0 \in B,\ 1 \notin B \\ \emptyset & 0,1 \notin B \\ X & 0,1 \in B \end{cases} \quad \in \mathcal{A} \iff A \text{ messbar}$$

Lemma 4.2 Verkettungen messbarer Funktionen sind messbar

Beweis $\underset{\mathcal{A}}{X} \xrightarrow{g} \underset{\mathcal{B}}{Y} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{Z}$ $\quad (f \circ g)^{-1}(\underset{\mathcal{C}}{\overset{\in}{C}}) = g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(C)}_{\in \mathcal{B}}) \in \mathcal{A}$ $\boxtimes$

Satz 4.3 $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \sigma(\mathcal{E}))$ Messräume, $f : X \to Y$ ist $\mathcal{A}$-$\sigma(\mathcal{E})$ messbar genau dann, wenn $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$

Beweis „$\Rightarrow$" wegen $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$ „$\Leftarrow$" weil $\{B \in \sigma(\mathcal{E}) \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält $\boxtimes$

Korollar 4.4: Seien X, Y topologische Räume mit Borel σ-Algebren $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B}(Y)$. Ist $f : X \to Y$ stetig, dann ist f messbar.

Beweis: $\mathcal{B}(Y) = \sigma(\tau_Y)$ $\quad \tau_Y$ Topologie von Y

$f^{-1}(\underset{\tau_Y}{\underset{\cap}{O}}) \in \tau_X \subset \mathcal{B}(X)$, da f stetig mit Lemma 4.3 ist f messbar $\blacksquare$

Achtung: direkt definiert ohne Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ zu spezifizieren

Erweiterte reelle Zahlen: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

mit: $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{ A \cup B \mid A \in \mathcal{P}(\{-\infty, +\infty\}),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

Übung: erzeugt von $\{(a,b] \mid a,b \in \overline{\mathbb{R}}\}$ oder $\{[a,b] \mid a,b \in \overline{\mathbb{R}}\}$ oder $\{[a,b) \mid a,b \in \overline{\mathbb{R}}\}$
oder $\{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ oder $\{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ oder $\{[a,\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ oder $\{(a,\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$
und noch ein paar Varianten ...

Korollar 4.5. Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum und $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$. (wenn keine σ-Algebra zu $\mathbb{R}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$ angegeben ist, wird $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bzw $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ angenommen)

Dann ist äquivalent

i) f ist messbar (ii) $\forall a \in \mathbb{R}: f^{-1}([a,\infty]) \in \mathcal{A}$ (iii) $\forall a \in \mathbb{R}: f^{-1}((a,\infty]) \in \mathcal{A}$

(iv) $\forall a \in \mathbb{R}: f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ (v) $\forall a \in \mathbb{R}: f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$

Wir wissen schon aus A II.

$f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ messbar von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

denn $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{ (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \mid a, b \in \mathbb{R}^2 \}$

$$(f, g)^{-1}((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = \underbrace{f^{-1}((a_1, b_1])}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{g^{-1}((a_2, b_2])}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

damit auch

$\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ messbar (Verkettung von (f, g) mit $\alpha x + \beta y$, $x \cdot y$, $\max\{x, y\}$, $\min\{x, y\}$)

und (siehe A II)

auch $\begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & g(x) = 0 \end{cases}$ messbar

Damit sind auch $\mathcal{A}$ - Treppenfunktionen messbar

Definition 4.6 Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum. Eine Funktion der Form
$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ heißt
$\mathcal{A}$ - Treppenfunktion (Symbol $f \in T_{\mathcal{A}}$) Sind alle $c_i \geq 0$, so ist
f nicht negativ und man schreibt $f \in T_{\mathcal{A}}^{+}$.

Bem: Man kann auch $c_i \in \overline{\mathbb{R}}$ zulassen
allerdings muss dann $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $c_i = +\infty$, $c_j = -\infty$
gefordert werden.

Zusammenspiel von Messbarkeit und Grenzwerten

Satz 4.7 Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum und $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar für alle $n \in \mathbb{N}$

Dann sind $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\limsup\limits_{n \to \infty} f_n$, $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ $\mathcal{A}$-messbar.

Ist (f_n) punktweise konvergent dann ist auch $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ $\mathcal{A}$-messbar.

Beweis: Sei $f(x) := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ $x \in X$ Dann gilt

$$x \in f^{-1}([-\infty, a]) \Rightarrow f(x) \in [-\infty, a] \Rightarrow \sup f_n(x) \le a \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) \le a$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty, a]) \quad \text{also} \quad f^{-1}([-\infty, a]) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty, a])$$

umgekehrt: $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty, a])$ ang $\sup f_n(x) > a$

dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f_{n_0}(x) > a$ dann $x \notin f_{n_0}^{-1}([-\infty, a])$ $\lightning$

also $\sup f_n(x) \le a$ d.h. $x \in f^{-1}([-\infty, a])$ insgesamt

$$\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([-\infty, a]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A} \quad \text{d.h. } f = \sup f_n \text{ ist } \mathcal{A} \text{ messbar}$$

wegen $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ ist auch $\inf f_n$ $\mathcal{A}$ messbar

wegen $\limsup f_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} f_k$ — " — $\limsup f_n$ — " —

wegen $\liminf f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} f_k$ — " — $\liminf f_n$ — " —

wegen $\lim f_n = \limsup f_n$ — " — $\lim f_n$ — " — $\boxtimes$

Wichtige Beobachtungen: Messbare Funktionen sind niemals "weit" von Treppenfunktionen entfernt.

Satz 4.8 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ sei messbar

a) Es existiert eine Folge $(s_n) \subset T_{\mathcal{A}}$ mit $s_n \to f$ punktweise.

b) Ist $f \geq 0$ so kann die Folge aus (a) in $T_{\mathcal{A}}^+$ monoton wachsend gewählt werden.

c) Ist f beschränkt, so ist die Konvergenz in (a) gleichmäßig.

Beweis: (b) zerlege Wertemenge $[0,\infty]$ von f in N_k+1 Intervalle A_{kj} mit $N_k = 2^{2k}$ und

$$A_{kj} = [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}) \qquad j = 0, .., N_k - 1 \quad (\text{Breite } 2^{-k})$$

$$A_{kN_k} = [2^k, \infty]$$

definiere $$S_k(x) := \sum_{j=0}^{N_k} \underbrace{j2^{-k}}_{= \min A_{kj}} \mathbb{1}_{\underbrace{f^{-1}(A_{kj})}_{\in \mathcal{A}}}(x) \qquad (\text{"Untersumme" von } f)$$

S_k erfüllt Eigenschaften aus (b) und (c)

Im Fall (a) zerlege $f = f^+ - f^-$ mit $f^+ = \underbrace{\max\{f,0\}}_{\text{messbar}} \geq 0$, $f^- = -\underbrace{\min\{f,0\}}_{\text{messbar}} \geq 0$

finde (S_n^+), (S_n^-) mit (b)

so dass $S_n^+ \to f^+$, $S_n^- \to f^-$ pktweise

mit $S_n := S_n^+ - S_n^-$ folgt (a) und (c) $\square$