Kapitel 5: Integraleigenschaften

Definition 5.1: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann heißt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein <u>Maßraum</u> (im Fall $\mu(X) = 1$ auch <u>Wahrscheinlichkeitsraum</u>). Ist $s \in T_{\mathcal{A}}^{+}$, so heißt $\sum_{y \in s(X)} y \mathbb{1}_{\{s=y\}}$ mit $\{s=y\} := s^{-1}(\{y\})$ die <u>kanonische Darstellung</u> von s und

$$\int s \mu := \sum_{y \in s(X)} y \, \mu(\{s=y\})$$

das <u>μ-Integral von s</u>.

Bem: andere Schreibweisen $\int s(x)\mu(dx)$, $\int s \, d\mu$, $\int s(x) \, d\mu(x)$, $\int d\mu(x) \, s(x)$, ...

Bem: ist $s = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{A_j}$, $c_j \geq 0$ eine beliebige andere Darstellung von s

dann ist $\int s \mu = \sum_{j=1}^{m} c_j \, \mu(A_j)$ (siehe Übungen)

Satz 5.2 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $s, t \in T_{\mathcal{A}}^+$, $\lambda \geq 0$. Dann sind auch λs, $s+t \in T_{\mathcal{A}}^+$ und

$$\int \lambda s \, \mu = \lambda \int s \, \mu \text{ (Homogenität)}, \quad \int (s+t) \, \mu = \int s \, \mu + \int t \, \mu \text{ (Additivität)}$$

Ist $s \leq t$, so gilt

$$\int s \, \mu \leq \int t \, \mu \text{ (Monotonie)}$$

Schließlich ist $\int t \, \mu = \sup \{ \int s \, \mu \mid s \in T_{\mathcal{A}}^+ \; s \leq t \}$

Beweis: Wegen Monotonie ist $\int t \, \mu$ obere Schranke von $M = \{ \int s \, \mu \mid s \in T_{\mathcal{A}}^+ \; s \leq t \}$ außerdem ist $\int t \, \mu \in M$ wegen $t \leq t \in T_{\mathcal{A}}^+$ also $\int t \, \mu = \sup M$

Restliche Aussagen folgen mit Satz 16.3 in Kombination mit Übungen $\blacksquare$

AII

Definition 5.3. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ sei messbar und $f \geq 0$.
Dann ist das <u>μ-Integral von f</u> definiert als

$$\int f \mu := \sup \mathcal{U}(f) \quad \text{mit} \quad \mathcal{U}(f) = \left\{ \int s \mu \,\middle|\, s \in T_{\mathcal{A}}^{+},\ s \leq f \right\} \quad \text{(Untersummen)}$$

Ist $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $\int f^{+} \mu$ oder $\int f^{-} \mu$ kleiner als ∞, so definiert man

$$\int f \mu := \int f^{+} \mu - \int f^{-} \mu$$

Sind beide Integrale endlich, so heißt f <u>integrierbar</u> (Symbol $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$)
In der W-Theorie wird $\int f \mu =: E(f)$ auch <u>Erwartungswert</u> von f genannt.

Lemma 5.4 Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f, g: X \to [0, \infty]$ messbar (Sper σ-Algebra von $\overline{\mathbb{R}}$) und $f \leq g$, dann gilt die Monotonie $\int f \mu \leq \int g \mu$.

Beweis Sei $s \in T_{\mathcal{A}}^{+}$ $s \leq f$ dann $s \leq g$ also $\int s \mu \leq \int g \mu$
d.h. $\int g \mu$ obere Schranke von $\mathcal{U}(f)$ also $\int f \mu \leq \int g \mu$ ∎

Lemma 5.5 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f: X \to [0,\infty]$ messbar, $\lambda \geq 0$. Dann gilt die Homogenität

$$\int \lambda f \, \mu = \lambda \int f \mu$$ des Integrals.

Beweis: $\lambda = 0$: $\lambda f = \mathbb{1}_\emptyset \in T_\mathcal{A}^+$ $\int \lambda f = \mu(\emptyset) = 0 = 0 \int f \mu$ ✓

$\lambda > 0$: Sei $s \in T_\mathcal{A}^+$ mit $s \leq \lambda f$ dann $\frac{1}{\lambda} s \leq f$, $\frac{1}{\lambda} s \in T_\mathcal{A}^+$

also $\frac{1}{\lambda} \int s \, \mu \overset{\text{Satz 5.2}}{=} \int \frac{1}{\lambda} s \, \mu \overset{\text{Def 5.3}}{\leq} \int f \mu$ d.h. $\int s \mu \leq \lambda \int f \mu$

d.h. $\int \lambda f = \sup U(\lambda f) \leq \lambda \int f \mu$

mit $f^* = \lambda f$; $\lambda^* := \frac{1}{\lambda}$ genauso $\underbrace{\int \lambda^* f^*}_{\int f \mu} \leq \underbrace{\lambda^* \int f^* \mu}_{\frac{1}{\lambda} \int \lambda f \mu}$

also $\int \lambda f \leq \lambda \int f \mu \leq \int \lambda f \, \mu$ ☒

Additivität ist aufwendiger ... kleiner Umweg

Lemma 5.6 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $s \in T_{\mathcal{A}}^{+}$. Dann ist

$$\nu(A) := \int \mathbb{1}_A \, s \, \mu \quad \text{ein Maß auf } \mathcal{A}$$

Beweis: Übungen $\square$

Satz 5.7 (monotone Konvergenz)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f_n: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $0 \le f_1 \le f_2 \le f_3 \le \dots$

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, \mu = \int \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, \mu$

Beweis: wegen $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq 0$ (messbar) existiert $\int f \mu$

punktweise monoton ...

wegen $f_n \le f$ für alle n ist $\int f_n \mu \le \int f \mu$ (Monotonie)

wegen Monotonie von $\int f_n \mu$ existiert $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \mu \le \int f \mu$

fehlt also noch: $\int f \mu \le \alpha$.

Sei $s \in T_{\mathcal{A}}^+$, $s \le f$ ... Absenkung $cs \in T_{\mathcal{A}}^+$ mit $0 < c < 1$

erzeugt aufsteigende Mengenfolge $A_n = \{ f_n \geq cs \} = \{ x \in X \mid f_n(x) \geq cs(x) \}$

da $f_{n+1} \geq f_n$ gilt $x \in A_n \Rightarrow x \in A_{n+1}$

Sei $x \in X$. Fall $f(x) = 0$: dann $0 \le f_n(x) \le f(x) = 0$ für alle n

und $0 \le c\, s(x) \le f(x) = 0$ also $f_n(x) \ge c s(x)$ —"—

also $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Fall $f(x) > 0$. Dann $c s(x) < f(x)$

und damit gibt es n mit $c s(x) \le f_n(x)$ da $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

also $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

insgesamt: $\bigcup A_n = X$

damit $\int f_n \mu \ge \int f_n \mathbb{1}_{A_n} \mu \ge \int c s \mathbb{1}_{A_n} \mu = c\, \nu(A_n)$ mit $\nu(A) = \int s \mathbb{1}_A \mu$

da ν σ-additiv: $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu(X) = \int s \mathbb{1}_X \mu = \int s \mu$

also $\alpha = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mu \ge c \int s \mu$ für alle $0 < c < 1$ d.h. $\alpha \ge \int s \mu$

damit α obere Schranke von $\mathcal{U}(f)$ d.h. $\int f \mu \le \alpha = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mu$ $\blacksquare$

Lemma 5.8 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $f, g : X \to [0,\infty]$ seien messbar.
Dann gilt $\int f+g \, \mu = \int f \mu + \int g \, \mu$. (Additivität)

Beweis: Mit Satz 4.8 gibt es monotone Folgen (f_n), (g_n) in $T_{\mathcal{A}}^{+}$
mit $f_n \to f$, $g_n \to g$ punktweise
also $(f_n + g_n)$ monotone Folge in $T_{\mathcal{A}}^{+}$ mit $f_n + g_n \to f+g$

$$\int f+g \, \mu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 5.7}}}{=} \lim \int f_n + g_n \, \mu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 5.2}}}{=} \lim \left(\int f_n \mu + \int g_n \mu \right) \underset{2\times \text{ Satz 5.7}}{=} \int f \mu + \int g \, \mu \qquad \boxtimes$$

Damit: Monotonie, Homogenität, Additivität übertragen auf Integrale nichtneg. Funktionen

jetzt noch: Übertragung auf integrierbare Funktionen

Zunächst: nützliches <u>Majorantenkriterium</u>

Satz 5.9 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \iff \int |f| \, \mu < \infty$$

Insbesondere $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ falls $|f| \leq g$ für ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Beweis: Übungen

Lemma 5.10 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ pwd, $\mathbb{1}_{A_i} f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $i = 1, \dots, n$

Dann gilt mit $A := \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i$ dann $\mathbb{1}_A f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\int \mathbb{1}_A f \mu = \sum_{i=1}^{n} \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu$

Ist $f \geq 0$ so gilt die Aussage auch für abzählbar viele A_i

Beweis: Sei $f \geq 0$ und $s \in T_{\mathcal{A}}^{+}$, $s \leq \mathbb{1}_A f$ Dann $\mathbb{1}_{A_i} s \leq \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_A f = \mathbb{1}_{A_i} f$

und $\int \mathbb{1}_A s \mu \underset{\text{Lemma 5.6}}{=} \sum \int \mathbb{1}_{A_i} s \mu \leq \sum \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu$

wegen $s \leq \mathbb{1}_A f$ ist $s(x) = 0$ für $x \in A^c$ also $\mathbb{1}_A s = s$

d.h. $\int s \mu \leq \sum \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu$ damit (Def 5.3) $\int \mathbb{1}_A f \mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu$

Weiter gibt es zu $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$: $s_i \in T_{\mathcal{A}}^{+}$, $s_i \leq \mathbb{1}_{A_i} f$ mit $\int s_i \mu \geq \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu - \frac{\varepsilon}{n}$

also $s = \sum_{i=1}^{n} s_i \in T_{\mathcal{A}}^{+}$, $s \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} f \leq \mathbb{1}_A f$ also

$$\int \mathbb{1}_A f \mu \geq \int s \mu = \int \sum_{i=1}^{n} s_i \mu \underset{\text{Satz 5.2}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int s_i \mu \geq \sum_{i=1}^{n} \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu - \varepsilon$$ da $\varepsilon > 0$ beliebig

also $\int \mathbb{1}_A f \mu \geq \sum_{i=1}^{n} \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu$ für alle n $\Rightarrow$ $\int \mathbb{1}_A f \mu \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu \geq \int \mathbb{1}_A f \mu$ ✓

Für beliebiges f gilt $\quad (\mathbb{1}_A f)^+ = \mathbb{1}_A \underbrace{f^+}_{\geq 0}, \quad \int \mathbb{1}_A f^+ \mu = \sum_{i=1}^{n} \int \underbrace{\mathbb{1}_{A_i} f^+}_{=(\mathbb{1}_{A_i} f)^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)} \mu < \infty$

$$(\mathbb{1}_A f)^- = \mathbb{1}_A \underbrace{f^-}_{\geq 0}, \quad \int \mathbb{1}_A f^- \mu = \sum_{i=1}^{n} \int \underbrace{\mathbb{1}_{A_i} f^-}_{=(\mathbb{1}_{A_i} f)^- \in \mathcal{L}^1(\mu)} \mu < \infty$$

$$\int \mathbb{1}_A f \mu = \int \mathbb{1}_A f^+ \mu - \int \mathbb{1}_A f^- \mu = \sum \int \mathbb{1}_{A_i} f^+ \mu - \sum \int \mathbb{1}_{A_i} f^- \mu$$

$$= \sum \left(\int (\mathbb{1}_{A_i} f)^+ \mu - \int (\mathbb{1}_{A_i} f)^- \mu \right) = \sum \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu \qquad \boxtimes$$

Satz 5.11 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Monotonie: $f \leq g \implies \int f \mu \leq \int g \mu$

Homogenität: $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\quad \int \lambda f \mu = \lambda \int f \mu$

Additivität: $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\quad \int f + g \mu = \int f \mu + \int g \mu$

Beweis: Sei $x \in X$ $\quad$ Fall $f(x) \geq 0$: $\quad f^+(x) = f(x) \leq g(x) = g^+(x)$

mit $f = \underbrace{f^+}_{\geq 0} - \underbrace{f^-}_{\geq 0}$ $\quad$ Fall $f(x) < 0$: $\quad f^-(x) = -f(x) \geq g^-(x)$

zurückführen auf Eigenschaften nichtneg. Integranden

denn $g(x) \geq 0$: $f^-(x) \geq 0$ ✓

$g(x) < 0$: $-f(x) \geq -g(x) = g^-(x)$ ✓

Lemma 5.4 $\int f^+ \mu \leq \int g^+ \mu$, $\int f^- \mu \geq \int g^- \mu$

damit $\int f \mu = \int f^+ \mu - \int f^- \mu \leq \int g^+ \mu - \int g^- \mu \leq \int g \mu$ $\quad$ Monotonie ✓

Fall $\lambda \geq 0$: $\quad (\lambda f)^+ = \lambda f^+$, $(\lambda f)^- = \lambda f^-$

Lemma 5.5: $\quad \int (\lambda f)^+ \mu = \lambda \int f^+ \mu < \infty$, $\int (\lambda f)^- \mu = \lambda \int f^- \mu < \infty$ $\quad$ also $\lambda f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

und $\quad \int (\lambda f)^+ \mu - \int (\lambda f)^- \mu = \lambda \left(\int f^+ \mu - \int f^- \mu \right) = \lambda \int f \mu$ ✓

Fall $\lambda = -1$: $(\lambda f)^+ = f^-$, $(\lambda f)^- = f^+$ $\rightsquigarrow$ $\lambda f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

und $\int \lambda f \, \mu = \int f^- \mu - \int f^+ \mu = - \int f \, \mu = \lambda \int f \, \mu$ ✓

Fall $\lambda < 0$: $\lambda f = \underbrace{-(\underbrace{|\lambda| f}_{\in \mathcal{L}^1(\mu)})}_{\in \mathcal{L}^1(\mu)}$ $\int \lambda f \mu = - \int |\lambda| f \mu = - |\lambda| \cdot \int f \mu = \lambda \int f \, \mu$ ✓

$\Rightarrow$ Homogenität ✓

wegen $|f+g| \leq |f| + |g|$ ist $\int |f+g| \, \mu \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \int |f| + |g| \, \mu = \int |f| \mu + \int |g| \mu \underset{\text{Lemma 5.9}}{<} \infty$

also (Lemma 5.9) $f+g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$f, g \geq 0$: Lemma 5.8 $\Rightarrow$ $\int f+g \, \mu = \int f \mu + \int g \, \mu$

$f, g < 0$: $\int f+g \, \mu = \int -(-f-g) \mu \underset{\text{Homogenität}}{=} - \int \underbrace{-f}_{\geq 0} + \underbrace{(-g)}_{\geq 0} \mu \underset{\text{Lemma 5.8}}{=} - \left(\int -f \, \mu + \int -g \, \mu \right) \underset{\text{Homogenität}}{=} \int f \mu + \int g \, \mu$

$f \geq 0,\ g < 0 \qquad A \quad \{f+g \geq 0\}$

$$\int \mathbb{1}_A f \, \mu = \int \underbrace{\mathbb{1}_A (f+g)}_{\geq 0} + (\underbrace{\mathbb{1}_A (-g)}_{\geq 0}) \, \mu = \int \mathbb{1}_A (f+g) \mu + \underbrace{\int - \mathbb{1}_A g \, \mu}_{= - \int \mathbb{1}_A g \, \mu}$$

$$\Rightarrow \quad \int \mathbb{1}_A (f+g) \, \mu = \int \mathbb{1}_A f \, \mu + \int \mathbb{1}_A g \, \mu$$

$$- \int \mathbb{1}_{A^c} g \, \mu = \int \mathbb{1}_{A^c} (-g) \, \mu = \int \mathbb{1}_{A^c} (f - (f+g)) \mu = \int \underbrace{\mathbb{1}_{A^c} f}_{\geq 0} + \underbrace{\mathbb{1}_{A^c} (-(f+g))}_{\geq 0} \, \mu$$

$$= \int \mathbb{1}_{A^c} f \, \mu + \int \mathbb{1}_{A^c} (-(f+g)) \, \mu$$

$$\Rightarrow \quad \int \mathbb{1}_{A^c} (f+g) \mu = \int \mathbb{1}_{A^c} f \mu + \int \mathbb{1}_{A^c} g \, \mu$$

Lemma 5.10 mit $A_1 = A,\ A_2 = A^c,\ X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{2} A_i$

$$\int f+g \, \mu = \int \mathbb{1}_X (f+g) \mu = \int \mathbb{1}_A (f+g) \, \mu + \int \mathbb{1}_{A^c} (f+g) \, \mu$$

$$= \int \mathbb{1}_A f \, \mu + \int \mathbb{1}_A g \mu + \int \mathbb{1}_{A^c} f \, \mu + \int \mathbb{1}_{A^c} g \, \mu$$

$$\overset{\text{Lemma 5.10}}{=} \int \mathbb{1}_X f \mu + \int \mathbb{1}_X g \, \mu = \int f \mu + \int g \, \mu$$

Nochmal Lemma 5.10 mit $A_1 = \{f \geq 0, g \geq 0\}$

$A_2 = \{f \geq 0, g < 0\}$

$A_3 = \{f < 0, g \geq 0\}$

$A_4 = \{f < 0, g < 0\}$

und $\dot{\bigcup} A_i = X$ und $\int \mathbb{1}_{A_i}(f+g)\,\mu = \int \mathbb{1}_{A_i} f\,\mu + \int \mathbb{1}_{A_i} g\,\mu$ $\blacksquare$

Satz 5.12 (Dreiecksungleichung)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann ist $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\left|\int f\,\mu\right| \leq \int |f|\,\mu$$

Beweis: $|f| = f^+ + f^-$ ist messbar, $|f|^+ = |f|$, $|f|^- = 0$ $\quad \int |f|^+\mu = \int |f|\mu < \infty$

also $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\quad$ Satz 5.9

wegen $-|f| \leq f \leq |f|$ und Monotonie

$-\int |f|\mu = \int -|f|\mu \leq \int f\,\mu \leq \int |f|\mu \implies \left|\int f\,\mu\right| \leq \int |f|\,\mu$ $\blacksquare$