Kapitel 6 Nullmengen

Definition 6.1 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \subset X$ heißt <u>μ-Nullmenge</u> falls $N \in \mathcal{A}$ und $\mu(N) = 0$.
Eine Eigenschaft gilt <u>μ-fast überall</u> (μ-fü) falls die Menge aller $x \in X$, für welche die Eigenschaft nicht gilt eine μ-Nullmenge ist. In der W-theorie spricht man von μ-<u>fast sicher</u> (μ-fs).

Lemma 6.2 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, N μ-Nullmenge, $A \in \mathcal{A}$ und $f \geq 0$ messbar oder $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann gilt

$$\int_N f \mu = 0 \quad \text{und} \quad \int_{A \cup N} f \mu = \int_A f \mu$$

Beweis: Zunächst $f \geq 0$. Sei $s \in T_{\mathcal{A}}^+$, $s \leq \mathbb{1}_N f$ dann $s = \mathbb{1}_N s$:

und $0 \leq \int \mathbb{1}_N s \mu = \sum_{\alpha \in S(X)} \alpha \mu(N \cap \{s = \alpha\}) \leq \mu(N) \sum_{\alpha \in S(X)} \alpha = 0$

d.h. $U(\mathbb{1}_N f) = \{0\}$ also $\int_N f \mu = \int \mathbb{1}_N f \mu = 0$

Wegen $A \subseteq A \cup N$ ist $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_{A \cup N}$ also $\int_A f \mu \leq \int_{A \cup N} f \mu$

und $A \cup N = N \cup A \setminus N$ so dass

$$\int_{A \cup N} f \mu \underset{\text{Lemma 5.10}}{=} \int_N f \mu + \int_{A \setminus N} f \mu = \int_{A \setminus N} f \mu \underset{A \setminus N \subset A}{\leq} \int_A f \mu \quad \text{also} \quad \int_A f \mu = \int_{A \cup N} f \mu$$

Ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$ wende Ergebnisse auf f^+, f^- an $\blacksquare$

Lemma 6.3 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Dann gilt

a) $|f| < \infty$ μ fü

b) Ist $g \geq 0$ und $\int g \mu = 0$ dann ist $g = 0$ μ fü

c) Ist $|g| \leq f$ μ-fü dann ist $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

d) Ist $g = f$ μ-fü dann ist $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\int g \mu = \int f \mu$

Beweis: a) $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \int |f| \mu < \infty$ Ann $\mu(\{|f| = \infty\}) > 0$

wegen $|f| \geq g$ mit $g(x) = \infty \cdot \mathbb{1}_{\{|f|=\infty\}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{n \mathbb{1}_{\{|f|=\infty\}}}_{g_n \in T_+^+ \text{ mon. Folge}}$

$\infty = \lim_{n\to\infty} n \, \mu(\{|f|=\infty\})$

$= \lim_{n\to\infty} \int g_n \mu \underset{\text{mon. Konv.}}{=} \int g \mu \underset{\text{Monotonie}}{\leq} \int |f| \mu < \infty$ ↯ also $\mu(\{|f|=\infty\}) = 0$

d.h. $|f| < \infty$ μ-f.ü. ✓

b) zu zeigen: $\mu(\{g > 0\}) = 0$.

Trick: $\{g > 0\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overbrace{\{g \geq \tfrac{1}{j}\}}^{A_j}$

und daher $\mu(\{g>0\}) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$ Ann $\mu(A_{j_0}) > 0$

$0 = \int g \mu \underset{\text{Monotonie}}{\geq} \int \mathbb{1}_{A_{j_0}} g \mu \underset{\text{Monotonie}}{\geq} \int \mathbb{1}_{A_{j_0}} \frac{1}{j_0} \mu = \frac{1}{j_0} \mu(A_{j_0}) > 0$ ↯ also $\mu(\{g>0\}) = 0$ ✓

Definition 6.4 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann heißt

$$\mathcal{A}^* = \sigma(\{A \mid A \in \mathcal{A} \text{ oder } A \subset N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N) = 0\})$$

die <u>Vervollständigung</u> von $\mathcal{A}$.

Im Fall $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ heißt $\mathcal{B}(\mathbb{R})^*$ die Lebesguesche σ-Algebra und die Elemente von $\mathcal{B}(\mathbb{R})^*$ heißen Lebesgue-messbare Mengen.

Lemma 6.5: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann existiert genau eine Fortsetzung μ^* von μ auf $\mathcal{A}^* = \{A \cup M \mid A \in \mathcal{A},\ M \subset N \in \mathcal{A},\ \mu(N) = 0\}$