# Kapitel 7: Lebesgue- und Riemannintegral

Erinnerung an Def 14.1 (AI)

Sei $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$

$t \in Z(I)$ : Zerlegung von $I$ mit $N_t$ Teilintervallen $I_k(t) = [t_{k-1}, t_k)$

$h \in J(I)$ : $t$-Treppenfunktion d.h. $h : I \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sum_{k=1}^{N_t} c_k \mathbb{1}_{I_k(t)}(x) \qquad c_k \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b h(x)\,dx := \sum_{k=1}^{N_t} c_k (t_k - t_{k-1})$$

beachte: auf $X = I$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})|_I$ ist $h \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$

und mit $\lambda|_{[a,b]} := \lambda|_{\mathcal{A}}$ ist $\int_a^b h(x)\,dx = \int h \, \lambda|_{[a,b]}$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ $\underline{h}, \overline{h} \in J(I)$ existieren mit $\underline{h} \leq f \leq \overline{h}$ und $\int_a^b \overline{h}(x)\,dx - \int_a^b \underline{h}(x)\,dx < \varepsilon$.

Dann $\int_a^b f(x)\,dx := \sup \left\{ \int_a^b \underline{h}(x)\,dx \;\middle|\; \underline{h} \leq f ,\ \underline{h} \in J(I) \right\}$

**Satz 7.1.** Sei $a<b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann integrierbar. Weiter sei $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{[a,b]}$ und $\lambda|_{[a,b]} := \lambda|_{\mathcal{A}}$. Dann existiert eine $\lambda|_{[a,b]}$-Nullmenge $N$ so dass $f \mathbb{1}_{N^c} \in \mathcal{L}^1(\lambda|_{[a,b]})$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f \mathbb{1}_{N^c} \, \lambda|_{[a,b]}$$

Beweis: zu $\varepsilon = 1/n$ existiert $\underline{h}_n, \overline{h}_n \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\underline{h}_n \leq f \leq \overline{h}_n$

und $\int_a^b (\overline{h}_n - \underline{h}_n)(x)\,dx < 1/n$ $\overset{!!}{I}$

Definiere $p_1 = \underline{h}_1$, $p_{n+1} = \max\{\underline{h}_{n+1}, p_n\} \in \mathcal{T}(I)$ dann $p_n \leq p_{n+1}$

$q_1 = \overline{h}_1$, $q_{n+1} = \min\{\overline{h}_{n+1}, q_n\} \in \mathcal{T}(I)$ dann $q_n \geq q_{n+1}$

und $p_n \leq f \leq q_n$ insbesondere existiert $p = \lim p_n \leq q = \lim q_n$

und $p_n - p_1 \geq p_1 - p_1 = 0$ setze $\mu := \lambda|_{[a,b]}$

nutze mon Konvergenz

$$\int p\,\mu = \int \lim (p_n - p_1)\,\mu + \int p_1\,\mu$$

$$= \lim \int (p_n - p_1)\,\mu + \int p_1\,\mu$$

$$= \lim \int p_n\,\mu$$

$q_1 \geq q_n \Rightarrow -q_n \geq -q_1$

Entsprechend folgt mit $q_1 - q_n \geq q_1 - q_1 = 0$

$$-\int q\,\mu = -\int q_1\,\mu + \int q_1 - q\,\mu = -\int q_1\,\mu + \lim \int q_1 - q_n\,\mu = -\lim \int q_n\,\mu$$

insgesamt: $0 \leq \int q - p\,\mu = \lim \int q_n - p_n\,\mu = \lim \int_a^b q_n(x) - p_n(x)\,dx$

$$\leq \lim \int_a^b \overline{h}_n(x) - \underline{h}_n(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

also (Lemma 6.3) $q - p = 0$ $\mu$-fü. Sei $N = \{q \neq p\}$

dann $q = p$ auf $N^c$ wegen $p \leq f \leq q$ ist $f = p = q$ auf $N^c$

Da $\quad -(|p_1|+|q_1|) \leq p_1 \leq p \leq q_1 \leq |p_1|+|q_1|$

ist $\quad |p| \leq |p_1| + |q_1| \in \mathcal{L}^1(\mu)$

also $\quad p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ damit $\mathbb{1}_{N^c} f = \mathbb{1}_{N^c} q = \mathbb{1}_{N^c} p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ also $q \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$$\int \mathbb{1}_{N^c} f \, \mu = \int \mathbb{1}_{N^c} p \, \mu = \int p \, \mu = \lim_{n\to\infty} \int p_n \, \mu = \lim_{n\to\infty} \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

wegen Monotonie des Riemann Integrals

$$\int_a^b p_n(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b q_n(x)\,dx$$

und $\quad \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b q_n(x)\,dx - \int_a^b p_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \boxtimes$

Korollar 7.2. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrierbar und $([a,b], \mathcal{B}(\mathbb{R})^*|_{[a,b]}, \lambda^*)$ der Lebesguesche Maßraum auf $[a,b]$.

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^*)$ und $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)\,\lambda^*(dx)$

Beweis: Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{f \in B\} = \underbrace{\underbrace{\{\mathbb{1}_{N^c} f \in B\}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{[a,b]}} \cap \underbrace{N^c}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{[a,b]}}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{[a,b]}} \cup \underbrace{M}_{\subset N \text{ mit } \lambda(N)=0} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^*|_{[a,b]}$$

da $\mathbb{1}_{N^c} f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ ist $(\mathbb{1}_{N^c} f)^+ = \mathbb{1}_{N^c} f^+ \in \mathcal{L}^1(\lambda)$

also $\int f^+ \lambda^* = \int \mathbb{1}_{N^c} f^+ \lambda^* + \int \mathbb{1}_N f^+ \lambda^* = \int \mathbb{1}_{N^c} f^+ \lambda < \infty$

analog $\int f^- \lambda^* < \infty$ also $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^*)$

und $\int_{[a,b]} f \lambda^* = \int \mathbb{1}_{N^c} f \lambda^* = \int \mathbb{1}_{N^c} f \lambda = \int_a^b f(x)\,dx$ $\blacksquare$