Beweis Lemma 8.6: Angenommen Satz 8.5 gelte für endliche Maße

Sein μ, ν σ-endlich, $\mu \ll \nu$

Dann ist $\mu + \nu$ σ-endlich (siehe Übungsaufgabe)

also gibt es $(A_n) \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcup A_n = X$, $(\mu+\nu)(A_n) < \infty$

Setze $B_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_k$; dann auch $(\mu+\nu)(B_n) < \infty$

$\mu_n = \mu|_{\mathcal{A}|_{B_n}}$, $\nu_n = \nu|_{\mathcal{A}|_{B_n}}$ sind Maße auf $(B_n, \mathcal{A}|_{B_n})$

Sei $\nu_n(N) = 0$ dann $\nu_n(N) = \nu(N) = 0$ und wegen $\mu \ll \nu$

also $0 = \mu(N) = \mu_n(N)$ d.h. $\mu_n \ll \nu_n$

Dann gibt es $h_n \geq 0$ messbar mit $\mu_n = h_n \nu_n$

Es gilt dabei $h_{n+1}|_{B_n} = h_n$ ν-fü denn für $A = \{ h_{n+1}|_{B_n} < h_n \} \in \mathcal{A}|_{B_n}$ gilt wegen $A \in \mathcal{A}|_{B_n} \subset \mathcal{A}|_{B_{n+1}} \subset \mathcal{A}$

$$\mu_{n+1}(A) = \mu(A) = \mu_n(A)$$

$$\mu_{n+1}(A) = \int_A h_{n+1}\, \nu = \int h_{n+1} \mathbb{1}_A\, \nu = \int h_{n+1}|_{B_n} \mathbb{1}_A\, \nu_n$$

$$\mu_n(A) = \int h_n \mathbb{1}_A\, \nu_n$$

damit $0 = \int \underbrace{(h_n - h_{n+1}|_{B_n})}_{\geq 0} \mathbb{1}_A\, \nu_n$

$\Rightarrow\ h_n = h_{n+1}|_{B_n}$ ν_n f.ü.

ändere h_{n+1} auf B_n ab so dass

$$h_{n+1}|_{B_n} = h_n$$

Dann $g_n(x) = \begin{cases} h_n(x) & x \in B_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

erfüllt $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$

Definiere $g = \lim_{n\to\infty} g_n$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_A h_n\, \nu_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_A g_n\, \nu \underset{\text{mon konv}}{=} \int \mathbb{1}_A \lim g_n\, \nu = \int \mathbb{1}_A g\, \nu = \int_A g\, \nu$$

∎

Beweis Lemma 8.7: Angenommen Satz 8.5 gilt für $\mu \leq \nu$

Seien μ, ν endlich und $\mu \ll \nu$

Dann gilt $\mu, \nu \leq \mu + \nu =: \eta$

Dann gibt es g, h mit $\mu = g\eta$, $\nu = h\eta$

Zeige $g \leq h$ η-f.ü. d.h. $\eta(M) = 0$ für $M = \{g > h\}$

$$\nu(M) = \int_M h\,\eta \underset{\substack{\uparrow \\ g>0 \text{ auf } M}}{=} \int_M \frac{h}{g}\, g\,\eta = \int_M \frac{h}{g}\,\mu \leq \int_M \mu = \mu(M) \leq \nu(M)$$ also überall "="

d.h. $\int_M 1 - \frac{h}{g}\,\mu = 0$ also $(g-h)\mathbb{1}_{\{g>h\}} = 0$ μ-f.ü.

wegen $((g-h)\mathbb{1}_{\{g>h\}})(x) = 0 \iff \mathbb{1}_{\{g>h\}}(x) = 0$ ist $\mathbb{1}_{\{g>h\}} = 0$ μ-f.ü.

also $\mu(\{g>h\}) = 0$ also $\mu(M) = 0$ also $\nu(M) = 0$ also $\eta(M) = \nu(M) + \mu(M) = 0$

Damit ist

$$\mu(A) \underset{\uparrow}{=} \mu(A \cap \{h>0\}) = \int_{A\cap\{h>0\}} g \,\eta = \int_{A\cap\{h>0\}} \tfrac{g}{h}\, h\, \eta = \int_{A\cap\{h>0\}} \tfrac{g}{h}\, \nu$$

denn $\{h=0\} \subseteq \{g=0\}$ ist μ-Nullmenge

definiert man $f(x) = \begin{cases} \frac{g}{h}(x) & h(x)>0 \\ 0 & h(x)=0 \end{cases}$

$$\mu(A) = \int_{A\cap\{h>0\}} f\, \nu \underset{\uparrow}{=} \int_A f\, \nu \quad \text{mit} \quad f \geq 0 \qquad \blacksquare$$

$\{h=0\}$ ist ν-Nullmenge

Beweis von Lemma 8.9

Λ wohldefiniert auf $\mathbb{L}^2(\nu)$

denn $f \sim_\nu g$ dann $\Lambda(f) = \int f \, \mu = \int_{\{f=g\}} f \, \mu = \int_{\{f=g\}} g \, \mu = \int g \, \mu = \Lambda(g)$

$\nu(\{f \neq g\}) = 0 \Rightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$

da $\mu \leq \nu$

Linearität folgt aus Linearität des Integrals

Für Treppenfunktionen $s \in T_A^+$

$$|\Lambda(s)| = \left|\int s \, \mu\right| = \sum_{\alpha \in s(X)} \alpha \, \mu(\{s=\alpha\}) \leq \sum_{\alpha \in s(X)} \alpha \, \nu(\{s=\alpha\}) = \int s \, \nu$$

$$= \langle 1, s \rangle_{\mathbb{L}^2(\nu)} \leq \|1\|_{\mathbb{L}^2(\nu)} \|s\|_{\mathbb{L}^2(\nu)} = \underbrace{\sqrt{\nu(X)}}_{<\infty} \|s\|_{\mathbb{L}^2(\nu)}$$

Cauchy-Schwarz Ungleichung in Hilberträumen

Dann $f \geq 0$, $0 \leq \underset{\in T_A^+}{s} \leq f$ dann $0 \leq \underset{\in T_A^+}{s^2} \leq f^2$

$$\int s\,\mu \leq L \sqrt{\int s^2 \nu} \leq L \sqrt{\int f^2 \nu} = L\,\|f\|_{\mathbb{L}^2(\nu)}$$

$$|\Lambda(f)| = \Lambda(f) = \int f\,\mu = \sup \mathcal{U}_\mu(f) \leq L\,\|f\|_{\mathbb{L}^2(\nu)}$$

Sei $f \in \mathbb{L}^2(\nu)$ beliebig. wegen $(f^+)^2 \leq f^2$, $(f^-)^2 \leq f^2$

ist $\int f^+ \mu \leq L\,\|f^+\|_{\mathbb{L}^2(\nu)} \leq L\,\|f\|_{\mathbb{L}^2(\nu)} < \infty$, $\int f^- \mu < \infty$

also $f \in \mathbb{L}^1(\mu)$ und $|\Lambda(f)| = \left|\int f\,\mu\right| \leq \int |f|\,\mu \leq L\,\||f|\|_{\mathbb{L}^2(\nu)} = L\,\|f\|_{\mathbb{L}^2(\nu)}$

$\boxtimes$

und Schlussargumentation:

Sei $\mu \leq \nu$, ν endlich. Sei $A \in \mathcal{A}$, dann $\mathbb{1}_A \in \mathbb{L}^2(\nu)$

denn $\|\mathbb{1}_A\|_{\mathbb{L}^2(\nu)} = \sqrt{\nu(A)} < \infty$

also $\mu(A) = \int \mathbb{1}_A \, \mu = \Lambda(\mathbb{1}_A) = \langle \mathbb{1}_A, g \rangle_{\mathbb{L}^2(\nu)} = \int \mathbb{1}_A \, g \, \nu = \int_A g \, \nu$

zeige noch: g Dichte

Sei $A = \{g < 0\}$, $f = \mathbb{1}_A$

$0 \leq \mu(A) = \int_A g \, \nu \leq 0$ also $\int_A (-g) \, \nu = 0$ also

$-g \, \mathbb{1}_{\{g<0\}} = 0$ ν-f.ü.

$\Leftrightarrow \mathbb{1}_{\{g<0\}} = 0$ d.h. $\nu(\{g < 0\}) = 0$ d.h. $g \geq 0$ ν-f.ü.

$\boxed{\text{M}}$