Kapitel 8: Maße mit Dichten

Satz und Def 8.1: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f: X \to [0,\infty]$ messbar und $A \in \mathcal{A}$

Dann ist $\int_A f \mu := \int \mathbb{1}_A f \mu$ das <u>μ-Integral von f auf A</u>

und $\nu(A) := \int_A f \mu$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$ (Symbol $f\mu := \nu$). Die Funktion f heißt dann <u>Dichte</u> von ν bezüglich μ.

Beweis: $\nu(\emptyset) = \int \mathbb{1}_\emptyset f \mu = \int \underbrace{\mathbb{1}_\emptyset}_{\in T_A^+} \mu = 1 \cdot \mu(\emptyset) = 0$ ✓

Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, A_i pwd $A := \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$

Fall 1: $\int \mathbb{1}_{A_i} f \mu = \infty$ für ein $i \in \mathbb{N}$

dann $\mathbb{1}_A f \geq \mathbb{1}_{A_i} f$ also $\int \mathbb{1}_A f \mu \geq \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu = \infty$

d.h. $\nu(A) = \int \mathbb{1}_A f \mu = \infty = \sum_{i=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{A_i} f \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$ ✓

Fall 2: $\int \mathbb{1}_{A_i} f \mu < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ dann Lemma 5.10 $\boxtimes$

Lemma 8.2 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum $g, f \geq 0$ messbar. Dann gilt

$$\int g\,(f\mu) = \int (gf)\mu$$

Beweis: üblicher 3-Sprung $\Rightarrow$ Übung

Satz 8.3 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f \geq 0$ messbar
Dann ist $g \in \mathcal{L}^1(f\mu) \Leftrightarrow gf \in \mathcal{L}^1(\mu)$
und es gilt

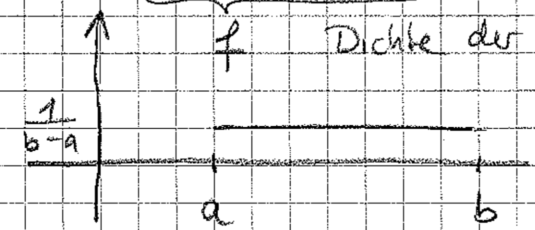
$$\int g\,(f\mu) = \int (gf)\mu$$

Beweis: Übungen

Beispiele aus der W-Theorie:

- <u>Gleichverteilung</u> auf $[a,b]$ $a<b$: $\mathcal{U}(a,b) = \underbrace{\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}}_{f} \lambda$

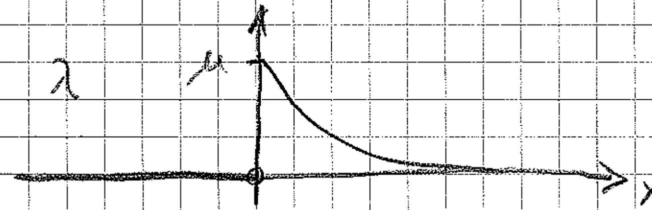
f Dichte der Gleichverteilung (bzgl Lebesguemaß)



- <u>Exponentialverteilung</u> mit Parameter $\mu > 0$

hat Dichte $f_\mu(x) = \mu e^{-\mu x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ bezüglich λ

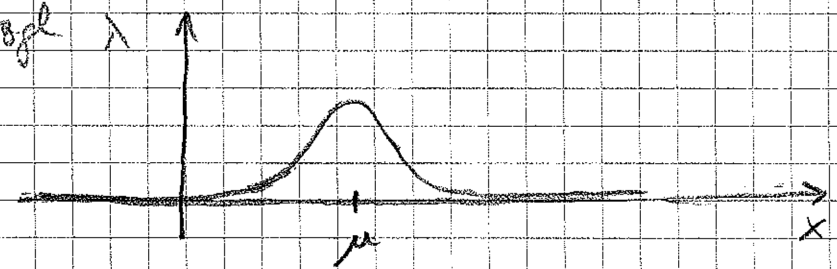
$E(\mu) = f_\mu \lambda$



- <u>Normalverteilung</u> mit Mittelwert μ und Varianz σ^2

hat Dichte $f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$ bzgl λ

$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2) = f_{\mu,\sigma^2} \lambda$



<u>Mittelwert</u> einer "Verteilung" (d.h. eines W-Maßes) $P = f\lambda$

ist $\bar{x} = \int x \, P(dx) = \int x \, f(x) \, \lambda(dx)$ (definiert falls $i f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ mit $i(x) = x$)

und <u>Varianz</u> $\int (x-\bar{x})^2 P(dx) = \int (x-\bar{x})^2 f(x) \lambda(dx)$ (— " — $i^2 f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$)

Beispiel Exponentialverteilung

$$\int x \, E(\mu)(dx) = \mu \int x \, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \, e^{-\mu x} \, \lambda(dx)$$

mon. Konvergenz $= \lim_{n\to\infty} \mu \int x \, \mathbb{1}_{[0,n)}(x) e^{-\mu x} \lambda(dx) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \mu \int_0^n x e^{-\mu x} dx$

R.I. = L.I.

nun ist $\int_0^n x \, \mu e^{-\mu x} dx \underset{\uparrow}{=} \left[-x e^{-\mu x}\right]_0^n + \int_0^n e^{-\mu x} dx = \left[-\frac{1}{\mu} e^{-\mu x}\right]_0^n = \frac{1}{\mu} - \frac{e^{-\mu n}}{\mu} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mu}$

part. Int.

also $\int x \, E(\mu)(dx) = \frac{1}{\mu}$

Definition 8.4 Seien μ, ν zwei Maße auf $(X, \mathcal{A})$. Dann heißt ν <u>absolut stetig</u> bezüglich μ (Symbol $\nu \ll \mu$) falls
falls jede μ-Nullmenge eine ν-Nullmenge ist

Satz 8.5 (Radon Nikodym)
Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum mit σ-endlichen Maßen μ, ν. Genau dann hat ν eine Dichte bezüglich μ, wenn $\nu \ll \mu$ gilt.

Leichter Teil des Beweises:

Sei $\nu = f\mu$ und $\mu(N) = 0$ dann $\nu(N) = \int_N f\mu = 0$ (Lemma 6.2).
also $(f\mu) \ll \mu$

Übriger Teil des Beweises nutzt verschiedene Problemreduktionsschritte
und den <u>Rieszschen Darstellungssatz</u>

Lemma 8.6 Es genügt Satz 8.5 für endliche Maße zu zeigen

Lemma 8.7 Es genügt den Fall ν endlich und $\mu \le \nu$ zu betrachten

Definition 8.8 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $1 \le p < \infty$.

$\mathcal{L}^p(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar}, \ |f|^p \in \mathcal{L}^1(\mu) \}$

Weiter sei $\|f\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} := \left(\int |f|^p \mu \right)^{1/p}$

Beobachtung: $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist mit $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}$ <u>fast</u> ein normierter Raum

Einziges Problem: $\|f\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} = 0 \not\Rightarrow f = 0$

Beispiel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$: $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}^p(\lambda)$ aber $\int |f|^p \lambda = 0$

Ausweg: betrachte Äquivalenzklassen von f ü-gleichen Funktionen

$f \sim_\mu g :\Leftrightarrow f = g \ \mu\text{-fü}$

Dann $\mathbb{L}^p(\mu) := \{ [f]_\sim \mid f \in \mathcal{L}^p(\mu) \}$ ist mit $\|\cdot\|_p$ vollständiger normierter Raum (Banachraum) und im Fall $p = 2$ mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle_2 = \int f g \, \mu$ ein Hilbertraum. Achtung: Elemente von $\mathbb{L}^p(\mu)$ werden wieder mit f, g etc. bezeichnet

Lemma 8.9. Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum und μ, ν endliche Maße auf $\mathcal{A}$ mit $\mu \leq \nu$.
Dann ist $\Lambda(f) := \int f \mu$ eine lineare Abbildung auf $\mathbb{L}^2(\nu)$
mit der Eigenschaft $|\Lambda(f)| \leq L \|f\|_{\mathbb{L}^2(\nu)}$ für alle $f \in \mathbb{L}^2(\nu)$ und ein $L \geq 0$.

Satz 8.10: (Rieszscher Darstellungssatz)
Sei $(H, \langle , \rangle)$ ein Hilbertraum und $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ sei eine
lineare Abbildung mit $|\Lambda(x)| \leq L \|x\|$ für alle $x \in H$. Dann existiert
ein eindeutiges $y \in H$ so dass $\Lambda(x) = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in H$

Mit Lemma 8.9 und Satz 8.10 existiert also $g \in \mathbb{L}^2(\nu)$ mit

$$\int f \mu = \Lambda(f) = \langle f, g \rangle = \int f g \nu \quad \text{für alle } f \in \mathbb{L}^2 \text{ ... auch für}$$

$$f = \mathbb{1}_A \quad \mu(A) = \int \mathbb{1}_A \mu = \int \mathbb{1}_A g \nu = \int_A g \nu$$

zeige noch $g \geq 0$ ν-f.ü.