Kapitel 9 Grenzwertsätze

Wir kennen schon: Monotone Konvergenz (Satz 5.7)

$$\underset{\text{messbar}}{\underset{\uparrow}{0 \leq f_n}} \nearrow f \quad \text{dann} \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, \mu$$

typische Anwendung zusammen mit Satz 4.8: Jedes $f \geq 0$ ist monotoner Grenzwert von $(f_n) \subset T_1^+$

- Zeige Integralaussage für Treppenfunktionen
- Erweitere Aussage auf $f \geq 0$ mit ——— + Satz 5.7
- Erweitere Aussage auf $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ über $f^+, f^- \geq 0$

manchmal unpraktisch: Monotoniebedingung an (f_n)

Ausweg: Dominierte Konvergenz (Satz 9.2)

Lemma 9.1 (von Fatou)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f_n : X \to [0,\infty]$ Folge messbarer Funktionen

Dann gilt

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mu$$

Beweis: Wegen $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\inf_{k\ge n} f_k(x)}_{=: g_n(x) \ge 0}$ und $g_n \uparrow \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$

und $g_n \le f_k$ für $k \ge n$ also $\int g_n \, \mu \overset{\text{Monotonie}}{\le} \inf\limits_{k\ge n} \int f_k \, \mu$

monotone Konvergenz: $\int \liminf\limits_{n\to\infty} f_n \, \mu = \int \lim\limits_{n\to\infty} g_n \, \mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \, \mu \le \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\ge n} \int f_k \, \mu$

$= \liminf\limits_{n\to\infty} \int f_n \, \mu$ $\boxtimes$

Satz 9.2 (Dominierte-Konvergenz)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Folge messbarer Funktionen die punktweise konvergiert. Gibt es $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $|f_n| \le g$ μ-fü für alle $n \in \mathbb{N}$

Dann ist $\lim f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, \mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mu$$

Beweis: Sei $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ |f_n| > g \}$ dann $\mu(N) \le \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(\{|f_n| > g\})}_{=0} = 0$

wir arbeiten mit $\tilde{f}_n := \mathbb{1}_{N^c} f_n$ und $\tilde{g} := \mathbb{1}_{N^c} g$, dann $|\tilde{f}_n| \le \tilde{g}$ für alle n

und $\tilde{f} := \lim \tilde{f}_n = \mathbb{1}_{N^c} \lim f_n$ sowie $|\tilde{f}| \le \tilde{g}$ und $\tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mu)$

so dass $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und damit $\lim f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (jeweils Lemma 6.3)

wegen $\tilde{g} - \tilde{f}_n \ge 0$ ist

$$\int \tilde{g} \mu - \int \tilde{f} \mu = \int \tilde{g} - \tilde{f} \, \mu = \int \lim (\tilde{g} - \tilde{f}_n) \mu \overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf \left(\int \tilde{g} \mu + \int - \tilde{f}_n \mu \right) = \int \tilde{g} \mu + \liminf_{n\to\infty} \int - \tilde{f}_n \mu$$

also $\int \tilde{f} \mu \ge - \liminf \left(- \int \tilde{f}_n \mu \right) = \limsup_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n \mu$

genauso mit $\tilde{g} + \tilde{f}_n \geq 0$: $\int \tilde{f}\,\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n\,\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n\,\mu$

insgesamt also Gleichheit $\int \tilde{f}\,\mu = \liminf \int \tilde{f}_n\,\mu = \limsup \int \tilde{f}_n\,\mu$

d.h. $\int \tilde{f}_n\,\mu$ ist konvergent

$$\int \lim f_n\,\mu \underset{\text{Lemma 6.2}}{=} \int \lim \tilde{f}_n\,\mu = \int \tilde{f}\,\mu = \lim_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n\,\mu \underset{\text{Lemma 6.2}}{=} \lim_{n\to\infty} \int f_n\,\mu \qquad \boxtimes$$

typische Anwendung: parameterabhängige Integrale

Ist $\omega \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\omega t)\, \lambda(dt)$ stetig bzw. differenzierbar ?

Satz 9.3 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in \mathcal{U}$ und $f : X \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für alle $y \in \mathcal{U}$ sei $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ so dass durch

$$g(y) := \int f(x,y)\,\mu(dx)$$

eine Funktion $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ definiert wird.

a) Für alle $x \in X$ sei $f(x, \cdot) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle a und sei $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $|f(x,y)| \leq h(x)$ für alle $(x,y) \in X \times \mathcal{U}$.
Dann ist auch g stetig in a.

b) Für alle $x \in X$ sei $f(x, \cdot) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in $\mathcal{U}$ und sei $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\left|\frac{\partial}{\partial y_i} f(x,y)\right| \leq h(x)$ für alle $(x,y) \in X \times \mathcal{U}$ $i = 1, \dots, n$
Dann ist auch g stetig differenzierbar an der Stelle a und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y_i} g(y)\Big|_{y=a} = \int \frac{\partial}{\partial y_i} f(x,y)\Big|_{y=a} \mu(dx) \qquad i = 1, \dots, n$$

Beweis: a) Sei $(y_n) \subset U$ eine Folge mit $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

Sei $g_n(x) = f(x, y_n)$, $g(x) = f(x,a)$ dann $g_n \longrightarrow g$ punktweise

(da $f(x,\cdot)$ stetig für jedes x) Außerdem $|g_n| \le h \in \mathcal{L}^1(\mu)$

dominierte Konvergenz: $\lim g(y_n) = \lim \int g_n \, \mu = \int \lim g_n \, \mu = \int f(x,a)\,\mu(dx) = g(a)$

b) Da U offen existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subset U$

Für beliebige Folge (δ_n) $\delta_n \to 0$ $|\delta_n| < \varepsilon$

$$\frac{g(a+\delta_n e_i) - g(a)}{\delta_n} = \int \underbrace{\frac{f(x, a+\delta_n e_i) - f(x,a)}{\delta_n}}_{g_n(x)} \mu(dx)$$

$$g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial}{\partial y_i} f(x,y)\Big|_{y=a} = g(x) \quad \text{punktweise}$$

und $|g_n(x)| \overset{\text{MWS}}{=} \left| \frac{\partial}{\partial y_i} f(x,y)\Big|_{a+\eta_n e_i} \right| \le h(x)$

dominierte Konvergenz: $\frac{\partial}{\partial y_i} g(y)\Big|_{y=a} = \int \frac{\partial}{\partial y_i} f(x,y)\Big|_{y=a} \mu(dx)$

Wegen (a) ist rechte Seite stetig also $g \in C^1(U)$ ☒