Kapitel 10 Produktmaße

Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$ $i = 1, \dots, n$ Messräume

und $X := X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ Produktraum

und $\mathcal{Z} := \{ A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{A}_i \ 1 \le i \le n \}$ "Zylindermengen"

$\sigma(\mathcal{Z})$ ist σ-Algebra auf X sog. Produkt σ-Algebra

Schreibweise $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i := \sigma(\mathcal{Z})$

man zeigt:

Lemma 10.1 Sind $(Y, \mathcal{B})$ und $(X_i, \mathcal{A}_i)$ $i = 1, \dots, n$ Messräume mit messbaren Funktionen $f_i : Y \to X_i$ dann ist $f = (f_1, \dots, f_n) : Y \to X_1 \times \dots \times X_n = X$ messbar von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$. Außerdem sind die Projektionen $\pi_i : X \to X_i$, $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ messbar von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}_i$.

Schließlich gilt $\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right)$

Beweis: es genügt Überprüfung auf Zylindermengen

$$f^{-1}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \{ y \in Y \mid (f_1(y), \ldots, f_n(y)) \in A_1 \times \ldots \times A_n \}$$
$$= \{ y \in Y \mid f_i(y) \in A_i \quad i = 1, \ldots, n \}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{B}$$

Für Projektionen gilt $\underbrace{\pi_i^{-1}(A_i)}_{\substack{\cap \\ \mathcal{A}_i}} = X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times A_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n \in Z \subset \sigma(Z)$

$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ klar $\sigma(\mathcal{M}) \subset \sigma(Z)$ da π_i messbar

wegen $A_1 \times \ldots \times A_n = A_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \cap X_1 \times A_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n \cap \ldots \cap X_1 \times \ldots \times X_{n-1} \times A_n$

ist $Z \subset \sigma(\mathcal{M})$ also $\sigma(Z) \subset \sigma(\mathcal{M})$ $\blacksquare$

Lemma 10.2 Seien $(X_i, \sigma(\mathcal{E}_i))$ $i=1,\dots,n$ Messräume mit

$$X_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{ik} \, , \quad E_{ik} \subset E_{ik+1} \, , \quad E_{ik} \in \mathcal{E}_i$$

Dann erzeugt $\mathcal{E} = \{ E_1 \times \dots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i \}$ die Produkt σ-Algebra

Beweis: klar: $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{Z})$ da $\mathcal{E} \subset \mathcal{Z}$

Außerdem $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)}_{\mathcal{M}})$

denn $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{M})$ da $E_1 \times \dots \times E_n = \pi_1^{-1}(E_1) \cap \dots \cap \pi_n^{-1}(E_n) \in \sigma(\mathcal{M})$,

und $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{E})$ da z.B. $\pi_1^{-1}(E_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_1 \times E_{2k} \times \dots \times E_{nk} \in \sigma(\mathcal{E})$

und $\sigma(\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)) = \underbrace{\pi_i^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_i))}_{\sigma\text{-Algebra die } \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i) \text{ enthält}}$ $\Rightarrow$ "$\subseteq$"

$\{ A \in \sigma(\mathcal{E}_i) \mid \pi_i^{-1}(A) \in \sigma(\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)) \}$ ist σ-Algebra die $\mathcal{E}_i$ enthält $\Rightarrow$ "$\supseteq$"

damit $\quad \pi_i^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_i)) = \sigma(\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)) \subset \sigma(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{E})$

damit $\quad \bigcup_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_i)) \subset \sigma(\mathcal{E})$

damit $\quad \sigma(\mathcal{Z}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 10.1}}}{=} \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_i))\right) \subset \sigma(\mathcal{E})$ $\quad \blacksquare$

Spezialfall: $\quad \mathcal{I}_n = \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}^n\} \qquad \sigma(\mathcal{I}_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

wegen $(a,b] = (a_1,b_1] \times \cdots \times (a_n,b_n]$ folgt Lemma 10.2

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{I}_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Definition 10.3 Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $1 \le i \le n$ Maßräume und sei

$X := X_1 \times \cdots \times X_n$, $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$. Dann heißt $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ <u>Produktmaß</u> der μ_i, falls

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu(A_1) \cdots \mu(A_n) \quad \text{für alle } A_i \in \mathcal{A}_i \quad 1 \le i \le n$$

beachte: Produktmaß von λ, λ bewertet Rechteck $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$
mit Rechteckinhalt $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$
und von $\lambda, \lambda, \lambda$ bewertet Quader $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ mit Volumen

... wenn es existiert ...

im Weiteren betrachten wir $\underline{\underline{n = 2}}$; Ergebnisse für $n > 2$ dann induktiv

Lemma 10.4 Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $i = 1,2$ σ-endliche Maßräume

$f : X_1 \times X_2 \longrightarrow [0,\infty]$ sei $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ messbar. Dann

i) $\forall x \in X_1$: $f(x,\cdot) : X_2 \to [0,\infty]$ ist $\mathcal{A}_2$ messbar

ii) $x \longmapsto \int f(x,y)\,\mu_2(dy)$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar

Beweis: Fall μ_2 ist endlich

$\mathcal{D} := \{ A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid \mathbb{1}_A$ hat Eigenschaften (i) und (ii) $\}$ hier $\mu_2(X_2) < \infty$ wichtig

klar: $\emptyset \in \mathcal{D}$, $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$ erfüllt (i) und (ii) $\Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$

$(A_i) \subset \mathcal{D}$ disjunkt $\mathbb{1}_{\cup A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i}$ erfüllt (i) und (ii)

$\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ ist Dynkin System; außerdem $Z \subset \mathcal{D}$ ist $\cap$-stabil

$\sigma(Z) \underset{\uparrow}{=} \mathcal{D}(Z) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(Z)$ damit i, ii korrekt für alle

Dynkin Lemma

$\mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$ damit für alle $f \in T_{\mathcal{A}}^+$ damit auch für alle $f \geq 0$

(mon Konvergenz)

Fall μ_2 σ-endlich: OBdA $X_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, $S_k \subset S_{k+1}$, $\mu_2(S_k) < \infty$

$\mu_2^k := \mathbb{1}_{S_k} \mu_2$ ist endliches Maß

d.h. $f|_{S_k}$ erfüllt (i) und (ii) für alle k

$\tilde{f}_k(x,y) = \begin{cases} f|_{S_k}(x,y) & y \in S_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist monoton wachsende Folge

Für $x \in X_1$ ist $\tilde{f}_k(x,\cdot)$ messbar auf $\mathcal{A}_2$ $\quad f(x,\cdot) = \lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k(x,\cdot)$ $\mathcal{A}_2$-messbar

und $\displaystyle\int f(x,y)\,\mu_2(dy) \underset{\text{mon Konv}}{=} \lim_{k\to\infty} \int \tilde{f}_k(x,y)\,\mu_2(dy) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int f_k(x,y)\,\mu_2^k(dy)}_{F_k(x)}$ messbar auf $\mathcal{A}_1$

d.h. $\displaystyle\int f(\cdot,y)\,\mu_2(dy) = \lim_{k\to\infty} F_k$ $\mathcal{A}_1$-messbar ☒

Satz 10.5 Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ-endliche Maßräume

Dann existiert ein eindeutiges Produktmaß $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$

auf $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (A) = \int \left(\int \mathbb{1}_A(x,y) \, \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx)$$

Beweis: Integralausdruck definiert nach Lemma 10.4

überprüfe Maßeigenschaften:

$\mu(\emptyset) = 0$ da $\mathbb{1}_\emptyset = 0$ ✓

$(A_i) \subset \mathcal{A}$ pwd $\Rightarrow$ $\mathbb{1}_{\dot\cup A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ monoton wachsende Folge

2x monotone Konvergenz + Linearität des Integrals $\Rightarrow$ $\mu\left(\dot\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ ✓

$\mu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1)\mu(A_2)$ denn $\mathbb{1}_{A_1 \times A_2}(x,y) = \mathbb{1}_{A_1}(x) \mathbb{1}_{A_2}(y)$

also μ Produktmaß

$$\left.\begin{array}{lll} X_1 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^1 & A_i^1 \subset A_{i+1}^1 & \mu_1(A_i^1) < \infty \\ X_2 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^2 & A_i^2 \subset A_{i+1}^2 & \mu_2(A_i^2) < \infty \end{array}\right\} \quad X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^1 \times A_i^2 \quad \mu(A_i^1 \times A_i^2) < \infty$$

$\Rightarrow$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-additiv und Z $\cap$-stabiles ES

mit Eindeutigkeitssatz folgt die Beh. $\blacksquare$

Damit $\lambda \otimes \lambda =: \lambda^2$ eindeutiges Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ das Rechtecke Flächeninhalt zuweist

$\lambda \otimes \lambda^2 =: \lambda^3$ — " — $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ das Quadern Volumen zuweist

$\lambda^{n+1} := \lambda \otimes \lambda^n$ Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$

$= \lambda \otimes \dots \otimes \lambda$