Kapitel 11: Integration bezüglich Produktmaßen

Satz 11.1 (von Tonelli)

Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $i = 1,2$ σ-endliche Maßräume, $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$ sei $\mathcal{A}$-messbar. Dann gilt

$$\int f \mu = \int \int f(x,y)\, \mu_2(dy)\, \mu_1(dx) = \int \int f(x,y)\, \mu_1(dx)\, \mu_2(dy)$$

Beweis: für $f = 1_A$ folgt $\int f \mu = \int\int f(x,y)\, \mu_2(dy)\, \mu_1(dx)$ aus Satz 10.5

dann auch für $f \in \mathcal{T}^+_{\mathcal{A}}$ dann auch für $f \geq 0$ (monotone Konvergenz).

$$S : X_2 \times X_1 \to X_1 \times X_2 \quad \text{ist messbar und bijektiv}$$
$$(y,x) \mapsto (x,y)$$

$\mu_2 \otimes \mu_1 (S^{-1}(A))$ ist Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

und $\mu_2 \otimes \mu_1 (S^{-1}(A_1 \times A_2)) = \mu_2 \otimes \mu_1 (A_2 \times A_1) = \mu_2(A_2)\, \mu_1(A_1) = \mu_1 \otimes \mu_2 (A_1 \times A_2)$

mit Eindeutigkeit: $\mu_1 \otimes \mu_2 = \mu_2 \otimes \mu_1 \circ S^{-1}$

dann $\mu(A) = \mu_2 \otimes \mu_1 (S^{-1}(A)) \underset{\text{Satz 10.5}}{=} \int \int \mathbb{1}_{S^{-1}(A)} (y, x) \, \mu_1(dx) \, \mu_2(dy)$

$= \int \int \mathbb{1}_A (x, y) \, \mu_1(dx) \, \mu_2(dy)$

also $\int f \, \mu = \int \int f(x,y) \, \mu_1(dx) \, \mu_2(dy)$ korrekt für $f = \mathbb{1}_A$

dann auch für $f \in T_A^+$ dann auch für $f \geq 0$ ∎

Übertragung auf $\int$ allgemeinere Funktionen ...

Grundidee wie immer $\int f \mu = \int f^+ \mu - \int f^- \mu$

$$= \iint f^+(x,y)\, \mu_1(dx)\, \mu_2(dy) - \iint f^-(x,\mu)\, \mu_1(dx)\, \mu_2(dy)$$

$$= \int \left(\int f^+(x,y)\, \mu_1(dx) - \int f^-(x,y)\, \mu_1(dx) \right) \mu_2(dy)$$

$$= \int \int f(x,y)\, \mu_1(dx)\, \mu_2(dy)$$

hier gibt es technische Probleme

Beispiel $f(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) - \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x)$ ist nicht integrierbar bzgl. λ

da $\int f^+ \lambda = \infty$, $\int f^- \lambda = \infty$

aber $f(x,y) = \mathbb{1}_{[0,\infty)\times\{0\}}(x,y) - \mathbb{1}_{(-\infty,0)\times\{0\}}(x,y)$ ist integrierbar bzgl. λ^2

da $f = 0$ λ^2-f.ü., $0 \in \mathcal{L}^1(\lambda^2)$ d.h. $\int f \lambda^2 = 0$

Problem: $\int f^+(x,0)\,\mu_1(dx) = \infty \quad , \quad \int f^-(x,0)\,\mu_1(x) = -\infty$

d.h. Integral von $f(\cdot,0)$ nicht definiert

aber: Definitionsproblem tritt nur bei $y=0$ auf .. allgemeiner nur auf Nullmenge

Lemma 11.3 Sei $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ Produktmaßraum
und $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$.
Dann ist für μ_2-fast alle y die Funktion $f(\cdot,y)$ μ_1-integrierbar
und für μ_1-fast alle x die Funktion $f(x,\cdot)$ μ_2-integrierbar

Wir schreiben
$$\int f(x,y)\,\mu_2(dy) := \begin{cases} \int f(x,y)\,\mu_2(dy) & f(x,\cdot) \text{ integrierbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und
$$\int f(x,y)\,\mu_1(dx) := \begin{cases} \int f(x,y)\,\mu_1(dx) & f(\cdot,y) \text{ integrierbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ dann $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$$\infty > \int |f| \mu = \int\int |f|(x,y)\, \mu_1(dx)\, \mu_2(dy)$$

also $y \longmapsto \int |f|(x,y)\, \mu_1(dx) < \infty$ μ_2 fü

damit $N = \{ y \in X_2 \mid \underbrace{\int |f|(x,y)\, \mu_1(dx)}_{\text{messbare Fkt in } y} = \infty \}$ messbar $\mu_2(N) = 0$

auf N^c ist $\int f^+(x,y)\, \mu_1(dx) < \infty$ und $\int f^-(x,y)\, \mu_1(dx) < \infty$

also integrierbar ; gleiche Argumentation für vertauschte Integrationsreihenfolge ∎

Satz 11.4 (von Fubini)

Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $i = 1,2$ σ-endliche Maßräume, $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$
$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ Dann

$$\int f \mu = \int\int f(x,y)\, \mu_2(dy)\, \mu_1(dx) = \int\int f(x,y)\, \mu_1(dx)\, \mu_2(dy)$$

Beweis: $\int f \mu = \int f^+ \mu - \int f^- \mu$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int\int f^+(x,y)\,\mu_1(dx)\,\mu_2(dy) - \int\int f^-(x,y)\,\mu_1(dx)\,\mu_2(dy)$$

$N = \{ \int |f|(x,\cdot)\,\mu_1(dx) = \infty \} \longrightarrow N^c$

$$= \int_{N^c} \underbrace{\int f^+(x,y)\,\mu_1(dx)}_{<\infty}\,\mu_2(dy) - \int_{N^c} \underbrace{\int f^-(x,y)\,\mu_1(dx)}_{<\infty}\,\mu_2(dy)$$

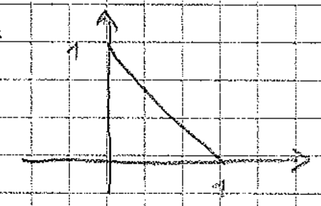
$$= \int_{N^c} \left(\int f^+(x,y)\,\mu_1(dx) - \int f^-(x,y)\,\mu_1(dx) \right) \mu_2(dy)$$

$$= \int_{N^c} \int f(x,y)\,\mu_1(dx)\,\mu_2(dy) = \int \underbrace{\int f(x,y)\,\mu_1(dx)}_{\text{jetzt definiert gemäß Lemma 11.3}}\,\mu_2(dy)$$

$\boxtimes$

Beispiel: $s = \int_A \binom{x_1}{x_2} \lambda^2(dx) \Big/ \int_A \lambda^2(dx)$ $\quad A = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_i \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1 \}$

Schwerpunkt von



$$\int_A f(x)\, \lambda^2(dx) = \int (\mathbb{1}_A f)(x)\, \lambda^2(dx) = \int\int (\mathbb{1}_A f)(x_1, x_2)\, \lambda(dx_2)\, \lambda(dx_1)$$

beschränkt | stetig } Majorante $C\, \mathbb{1}_A$ integrierbar $\rightsquigarrow \mathbb{1}_A f \in \mathcal{L}^1(\lambda^2)$

Stetige Fkt auf komp. Mengen sind durch Konstante beschränkt

Geometriebehandlung $\quad \mathbb{1}_A(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x_1)\, \mathbb{1}_{[0,1-x_1]}(x_2)$

$$\int_A f(x)\,\lambda^2(dx) = \int_{[0,1]} \int_{[0,1-x_1]} f(x_1,x_2)\,\lambda(dx_2)\,\lambda(dx_1)$$

hier: $f \equiv 1$ Riemann intbar $\int_A \lambda^2(dx) = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} dx_2\,dx_1 = \int_0^1 (1-x_1)\,dx_1 = \left[-\frac{1}{2}(1-x_1)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$f(x) = x_1$ — " — $\int_A x_1\,\lambda^2(dx) = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1\,dx_2\,dx_1 = \int_0^1 x_1(1-x_1)\,dx_1 = \left[\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{3}x_1^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

$f(x) = x_2$ — " — $\int_A x_2\,\lambda^2(dx) = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_2\,dx_2\,dx_1 = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x_1)^2\,dx_1 = \left[-\frac{1}{6}(1-x_1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

Schwerpunkt $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$