Kapitel 12: Bildmaße

Definition 12.1 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(Y, \mathcal{B})$ Messraum, $\Psi: X \to Y$ messbar.

Dann heißt $\Psi(\mu) : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ <u>Bildmaß</u> von μ unter Ψ.

$$B \longmapsto \mu(\{\Psi \in B\}) = \mu(\Psi^{-1}(B))$$

Spielen große Rolle in der W-Theorie ...

Messung liefert Werte $\omega \in \Omega := \mathbb{R}^d$

die eine bestimmte Häufigkeits<u>verteilung</u> $P : \mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ haben

$\Rightarrow$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum

Die Messung wird in eine "Formel" eingesetzt, um eine Folgegröße X auszurechnen ... $X(\omega)$ schwankt mit ω ... wie ist die Werteverteilung von X?

Antwort: $X(P)$

In der W-Theorie wird $X(P)$ die <u>Verteilung von X</u> genannt (oft mit P_X abgekürzt) automatische Folgefragen: wie berechnet man Integrale bezüglich Bildmaßen?

Satz 12.2 (Transformationslemma)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(Y, \mathcal{B})$ Messraum, $\Psi : X \to Y$ messbar und $f : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$\int f \; \Psi(\mu) = \int f \circ \Psi \; \mu$$

Außerdem ist $f \in \mathcal{L}^1(\Psi(\mu))$ genau dann, wenn $f \circ \Psi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist.
In diesem Fall gilt ebenfalls die Integralidentität.

Beweis: 1) $f \in T^+_{\mathcal{B}}$ d.h. $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{B_i}$ $c_i \geq 0$

$$\int f \; \Psi(\mu) = \sum_{i=1}^{n} c_i \Psi(\mu)(B_i) = \sum c_i \mu(\{\Psi \in B_i\}) = \int \sum c_i \mathbb{1}_{\{\Psi \in B_i\}} \mu$$

$$= \int \sum c_i \mathbb{1}_{B_i}(\Psi) \; \mu = \int f \circ \Psi \; \mu$$

entscheidende Stelle: $x \in \{\Psi \in B_i\} \Leftrightarrow \Psi(x) \in B_i$

2) $f \geq 0$ approximiere mit Treppenfkt $0 \leq f_n \nearrow f$

beachte $0 \leq f_n \circ \Psi \nearrow f \circ \Psi$

2× mon Konvergenz $\int f \, \Psi(\mu) = \lim \int f_n \, \Psi(\mu) = \lim \int f_n \circ \Psi \, \mu = \int f \circ \Psi \, \mu$

3) $f \in \mathcal{L}^1(\Psi(\mu)) \Leftrightarrow f^{+/-} \in \mathcal{L}^1(\Psi(\mu)) \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} (f \circ \Psi)^{+/-} = f^{+/-} \circ \Psi \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow f \circ \Psi \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$\int f \, \Psi(\mu) = \int f^+ \, \Psi(\mu) - \int f^- \, \Psi(\mu) = \int f^+ \circ \Psi \, \mu - \int f^- \circ \Psi \, \mu$

$= \int (f \circ \Psi)^+ \, \mu - \int (f \circ \Psi)^- \, \mu = \int f \circ \Psi \, \mu$ $\blacksquare$

Beispiel: $\mu = \sum_{i=1}^{n} w_i \delta_{x_i}$ $w_i \geq 0$ Punktmaß auf $(X, \mathcal{A})$

$H: X \to Y$ messbar nach $(Y, \mathcal{B})$

$H(\mu) = ?$

$$H(\mu)(A) = \mu(H \in A) = \sum w_i \, \delta_{x_i}(H \in A) = \sum w_i \, \mathbb{1}_{\{H \in A\}}(x_i)$$

$$= \sum w_i \, \mathbb{1}_A(H(x_i)) = \sum w_i \, \delta_{H(x_i)}(A) \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{A}$$

also $\quad H\left(\sum w_i \delta_{x_i}\right) = \sum \underbrace{w_i}_{\text{Gewichte bleiben gleich}} \, \delta_{\underbrace{H(x_i)}_{\text{Positionen werden transformiert}}}$

Beispiel: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum $\quad \Psi : X \to Y$ messbar nach $(Y, \mathcal{B})$

$f : Y \to [0, \infty]$ messbar

dann $\quad f\,\Psi(\mu) = \Psi(f \circ \Psi\, \mu)$

$$(f\,\Psi(\mu))(A) = \int_A f \, \Psi(\mu) \underset{\text{Trafolemma}}{=} \int \mathbb{1}_A \circ \Psi \; f \circ \Psi \; \mu = \int \mathbb{1}_A \circ \Psi \; (f \circ \Psi\, \mu) \underset{\text{Trafolemma}}{=} \int \mathbb{1}_A \, \Psi(f \circ \Psi\, \mu)$$

$$= \Psi(f \circ \Psi\, \mu)(A)$$