Kapitel 13: Transformationssatz

Ziel: $\phi^{-1}(\lambda^n) = |\det \phi'|\, \lambda^n$ Bildmaß des Lebesgue-Maßes unter glatter Abbildung ist wieder ein gewichtetes Lebesgue-Maß

$\uparrow$ Diffeomorphismus

Lemma 13.1: Sei $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\phi : X \to \phi(X)$ sei streng monoton und stetig differenzierbar auf X.

Dann gilt $\phi^{-1}(\lambda) = |\phi'|\,\lambda$

Beweis: ϕ ist invertierbar mit $\phi^{-1} \in C^1$, insbesondere ist ϕ^{-1} messbar

σ-Algebra auf X ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})|_X$ erzeugt von kompakten Teilintervallen $[a,b] \subset X$, $a \leq b$

$$\phi^{-1}(\lambda)([a,b]) = (\lambda \circ (\phi^{-1})^{-1})([a,b]) = \lambda(\phi([a,b])) = |\phi(b) - \phi(a)|$$

$$= \left| \int_a^b \phi'(x)\,dx \right| = \int_a^b |\phi'(x)|\,dx = \int_{[a,b]} |\phi'(x)|\,\lambda(dx) = (|\phi'|\lambda)([a,b])$$

Eindeutigkeitssatz $\Rightarrow$ $\phi'(\lambda) = |\phi'|\lambda$ $\boxtimes$

Mit dem Transformationslemma ergibt sich Substitutionsregel für Lebesgue-Integral:

$\phi^{-1}: \phi(I) \to I$ messbar

$$\int_{\phi(I)} g \, \lambda = \int_{\phi(I)} g \circ \phi \circ \phi^{-1} \, \lambda = \int_{I} g \circ \phi \; \phi^{-1}(\lambda) \underset{\text{Lem 13.1}}{=} \int_{I} g \circ \phi \; |\phi'| \, \lambda$$

also zB. für ϕ streng mon. wachsend & diffbar, $g|\phi'|$ intbar

$$\int_{(\phi(a),\phi(b))} g(x) \, \lambda(dx) = \int_{(a,b)} g(\phi(x)) \, |\phi'(x)| \, \lambda(dx)$$

Ziel: „gleiche" Formel in $\mathbb{R}^n$

Beweis: Induktion über n

benötigt allgemeines Resultat für gewisse Spezialfälle von Diffeomorphismen

Übergang von offenen Würfeln zu offenen Mengen immer möglich:

Lemma 13.2 Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : X \to Y$ sei ein Diffeomorphismus

gibt es zu jedem $x \in X$ einen offenen Würfel mit $x \in (a_x, b_x) \subset X$ und $(\phi|_{(a_x,b_x)})^{-1}(\lambda^n) = |\det \phi'|_{|(a_x,b_x)} \lambda^n$

dann gilt auch $\phi^{-1}(\lambda^n) = |\det \phi'| \lambda^n$

Beweis: $E = X \cap \mathbb{Q}^n$ zu $x \in (a,b) \subset X$ gibt es $r_x \in \mathbb{Q}$ und $e_x \in E$ mit $x \in B_{r_x}(e_x) \subset (a_x, b_x)$

da $\{B_r(e) \mid r \in \mathbb{Q}, e \in E\}$ abzählbar ist

$X = \bigcup_{x \in X} B_{r_x}(e_x)$ abzählbare Vereinigung; schreibbar als $\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} V_n$

mit V_n messbar und jedes $V_n \subset B_{r_x}(e_x) \subset (a_x, b_x)$ für ein $x \in X$.

$$\underset{\substack{\cap \\ X}}{\phi^{-1}(\lambda^n)(A)} = \sum \phi^{-1}(\lambda^n)(\underset{\substack{\cap \\ (a_x,b_x)}}{V_n \cap A}) \underset{\text{wie gilt}}{=} \sum \int \mathbb{1}_{V_n \cap A} |\det \phi'|_{|(a_x,b_x)} \lambda^n \underset{\substack{\text{mon} \\ \text{Konv}}}{=} \int_A |\det \phi'| \lambda^n$$

$\boxed{}$

$$\lambda^n(\phi(V_n \cap A)) = \lambda^n(\phi|_{(a_x,b_x)}(V_n \cap A)) = (\phi|_{(a_x,b_x)})^{-1}(\lambda^n)(V_n \cap A)$$

Lemma 13.3 Für jede Komponentenpermutation $P: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gilt
$$P(\lambda^n) = \lambda^n$$

Beweis: Überprüfe auf $\mathcal{I}_n$ $\quad (Px)_i = x_{\sigma(i)}\,;\ (P^{-1}y)_i = y_{\sigma^{-1}(i)}$

$$P(\lambda^n)\big((a,b]\big) = \lambda^n\big(P^{-1}((a,b])\big) = \lambda^n\Big((a_{\sigma^{-1}(1)}, b_{\sigma^{-1}(1)}] \times \dots \times (a_{\sigma^{-1}(n)}, b_{\sigma^{-1}(n)}]\Big)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \lambda\big((a_{\sigma^{-1}(i)}, b_{\sigma^{-1}(i)}]\big) = \prod_{i=1}^{n} \lambda\big((a_i, b_i]\big) = \lambda^n\big((a,b]\big) \qquad \boxtimes$$

Lemma 13.4 Sei $X = (a,b) \subset \mathbb{R}^n$
und $\Phi(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x))$ sei ein Diffeomorphismus auf X.
Dann gilt $\Phi^{-1}(\lambda^n) = |\det \Phi'|\, \lambda^n$

Beweis: $\phi' = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & \\ \partial_1\varphi & \partial_2\varphi & \cdots & \partial_{n-1}\varphi & \partial_n\varphi \end{pmatrix}$

$\det \phi' = \partial_n \varphi$

da ϕ Diffeomorphismus ist $\partial_n \varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in X$

d.h. für jedes $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ ist $\varphi(\bar{x}, \cdot)$ streng monoton auf (a_n, b_n)

kompakter Teilwürfel $[c, d] = [\tilde{c}, \tilde{d}] \times [c_n, d_n]$

$$\phi^{-1}(\lambda^n)(A) = \lambda^n(\phi(A)) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int \int \mathbb{1}_{\phi(A)}(\bar{x}, x_n)\, \lambda(dx_n)\, \lambda^{n-1}(d\bar{x}) = \int \mathbb{1}_{[\tilde{c},\tilde{d}]}(\bar{x}) \int \mathbb{1}_{\varphi(\bar{x}, [c_n, d_n])}(x_n)\, \lambda(dx_n)\, \lambda^{n-1}(d\bar{x})$$

$$= \int \mathbb{1}_{[\tilde{c},\tilde{d}]}(\bar{x})\, \lambda(\varphi(\bar{x}, [c_n, d_n]))\, \lambda^{n-1}(d\bar{x})$$

$$= \int \mathbb{1}_{[\tilde{c},\tilde{d}]}(\bar{x})\, \varphi(\bar{x}, \lambda)([c_n, d_n])\, \lambda^{n-1}(d\bar{x})$$

Lemma 13.1 $$= \int \mathbb{1}_{[\tilde{c},\tilde{d}]}(\bar{x})\, (|\partial_n \varphi(\bar{x}, \cdot)|\lambda)([c_n, d_n])\, \lambda^{n-1}(d\bar{x})$$

$$= \int \mathbb{1}_{[\tilde{c},\tilde{d}]}(\bar{x}) \int \mathbb{1}_{[c_n, d_n]}(x_n)\, |\partial_n \varphi(x)|\, \lambda(dx_n)\, \lambda^{n-1}(d\bar{x}) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_A |\det \phi'|\, \lambda^n$$

▨

Wichtig für Induktionsschritt

Lemma 13.5: Sei $X = (a, b) \subset \mathbb{R}^n$ und $\phi(x) = (\tilde{\Phi}(x), x_n)$ sei ein Diffeomorphismus auf X.
gilt $\psi^{-1}(\lambda^{n-1}) = |\det \psi'| \lambda^{n-1}$ für Diffeomorphismen auf offenen Würfeln in $\mathbb{R}^{n-1}$ dann gilt auch $\phi^{-1}(\lambda^n) = |\det \phi'| \lambda^n$

Beweis: Sei $\psi_{x_n}(\bar{x}) := \tilde{\Phi}(\bar{x}, x_n)$ offensichtlich $\psi_{x_n} \in C^1$ für alle $x_n \in (a_n, b_n)$

Sei $\Theta_{y_n}(\bar{y}) := (\phi_1^{-1}(\bar{y}, y_n), \ldots, \phi_{n-1}^{-1}(\bar{y}, y_n))$ für $(\bar{y}, y_n) \in \phi(X) = Y$ offen
offensichtlich $\Theta_{y_n} \in C^1$ für alle $y_n \in (a_n, b_n)$

dann gilt: $\Theta_{x_n}(\psi_{x_n}(\bar{x})) = \phi_1^{-1}(\underbrace{\psi_{x_n}(\bar{x}), x_n}_{\phi(\bar{x}, x_n)}), \ldots, \phi_{n-1}^{-1}(\underbrace{\psi_{x_n}(\bar{x}), x_n}_{\phi(\bar{x}, x_n)})) = \bar{x}$

und $\psi_{x_n}(\Theta_{x_n}(\bar{y})) = \tilde{\Phi}(\underbrace{\Theta_{x_n}(\bar{y}), x_n}_{= \phi^{-1}(\bar{y}, x_n)}) = \tilde{\Phi}(\phi^{-1}(\bar{y}, x_n)) = \bar{y}$ da $\tilde{\Phi}_n^{-1}(\bar{y}, y_n) = y_n$

insgesamt $\Theta_{x_n} = \psi_{x_n}^{-1} \Rightarrow \psi_{x_n}$ Diffeom.

$$\phi^{-1}(\lambda^n)([c,d]) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int \mathbb{1}_{[c_n,d_n]}(x_n) \int \mathbb{1}_{\psi_{x_n}([\tilde{c},\tilde{d}])}(\bar{x})\, \lambda^{n-1}(d\bar{x})\, \lambda(dx_n)$$

$$= \int \mathbb{1}_{[c_n,d_n]}(x_n)\ \psi(\lambda^{n-1})([\tilde{c},\tilde{d}])\ \lambda(dx_n)$$

$$= \int \mathbb{1}_{[c_n,d_n]}(x_n) \int |\det \psi'_{x_n}(\bar{x})|\, \mathbb{1}_{[\tilde{c},\tilde{d}]}(\bar{x})\, \lambda^{n-1}(d\bar{x})\, \lambda(dx_n)$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int \mathbb{1}_{[c,d]}\, |\det \phi'|\, \lambda^n = (|\det \phi'|\, \lambda^n)([c,d])$$

und

$$\phi'(\bar{x},x_n) = \begin{pmatrix} \psi'_{x_n}(\bar{x}) & \partial_n \phi(\bar{x},x_n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |\det \phi'(\bar{x},x_n)| = |\det \psi'_{x_n}(\bar{x})|$$

Satz 13.6 Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi: X \to Y$ sei ein Diffeomorphismus

a) Es gilt $\phi^{-1}(\lambda^n) = |\det \phi'| \, \lambda^n$

b) $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n|_{\phi(X)}) \Leftrightarrow f \circ \phi \, |\det \phi'| \in \mathcal{L}^1(\lambda^n|_X)$ und

$$\int_{\phi(X)} f(y) \, \lambda^n(dy) = \int_X f(\phi(x)) \, |\det \phi'(x)| \, \lambda^n(dx)$$

Beweis: Induktionsanfang: $n=1$ Lemma 13.1 und Lemma 13.2

Sei $\bar{x} \in X$. Da Φ Diffeomorphismus ist $\partial_n \Phi(\bar{x}) \neq 0$

es gibt also $i \in \{1, .., n\}$ mit $\partial_n \Phi_i(\bar{x}) \neq 0$

wähle Permutation $P(x) = (x_1, .., x_n, .., x_i)$ $\longleftarrow$ hier passt Lemma 13.3

setze $\tilde{\Phi} := P \circ \Phi$ dann $\partial_n \tilde{\Phi}_n(\bar{x}) \neq 0$

setze $\Psi(x) := (x_1, .., x_{n-1}, \tilde{\Phi}_n(x))$ dann $\det \Psi'(\bar{x}) = \partial_n \Phi_n(\bar{x}) \neq 0$

Satz über inverse Funktionen: es gibt $(a_x, b_x) \ni \bar{x}$ $\tilde{\Psi} := \Psi|_{(a_x, b_x)}$ Diffeomorphismus

$\uparrow$

hier passt Lemma 13.4

auf $Y = \tilde{\Psi}((a_x, b_x))$ ist $S := \tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi}^{-1}$ ein Diffeomorphismus

und $S_n(y) = \tilde{\Phi}_n(\tilde{\Psi}^{-1}(y)) = \tilde{\Psi}_n(\tilde{\Psi}^{-1}(y)) = y_n$

also $S(y) = (\tilde{S}(y), y_n)$ ← hier passt Lemma 13.5

und $\Phi|_{(a_x,b_x)} = P \circ \underbrace{\underbrace{P \circ \Phi}_{\tilde{\Phi}} \circ \tilde{\Psi}^{-1}}_{S} \circ \tilde{\Psi} = P \circ S \circ \tilde{\Psi}$ $\quad (\tilde{\Phi}|_{(a_x,b_x)})^{-1} = \tilde{\Psi}^{-1} \circ S^{-1} \circ P$

$$\Phi|_{(a_x,b_x)}^{-1}(\lambda^n) = \tilde{\Psi}^{-1}(S^{-1}(P(\lambda^n)))$$

Lemma 13.3 $= \tilde{\Psi}^{-1}(S^{-1}(\lambda^n))$

Lemma 13.5 + Lemma 13.2 $= \tilde{\Psi}^{-1}(|\det S'| \lambda^n) = \tilde{\Psi}^{-1}(|\det S'| \circ \tilde{\Psi} \circ \tilde{\Psi}^{-1} \lambda^n)$

Bildmaßformel $= |\det S'| \circ \tilde{\Psi} \; \tilde{\Psi}^{-1}(\lambda^n) \underset{\text{Lemma 13.4}}{=} |\det S'| \circ \tilde{\Psi} \; |\det \tilde{\Psi}'| \lambda^n$

wegen $\det \Phi'|_{(a_x,b_x)} = \det(P \circ S \circ \tilde{\Psi})'$

Kettenregel $= \det (P' \circ S \circ \tilde{\Psi})(S' \circ \tilde{\Psi})\, \tilde{\Psi}'$

Determinanten-multiplikationssatz $= \underbrace{\det P' \circ S \circ \tilde{\Psi}}_{=1} \det S' \circ \tilde{\Psi} \det \tilde{\Psi}'$

da $P' = P$, $\det P = 1$

folgt : $(\Phi|_{(a_x,b_x)})^{-1}(\lambda^n) = |\det \Phi'|_{(a_x,b_x)}\, \lambda^n$

(b) folgt aus (a) wie in ① mit Transformationslemma $\boxed{}$