Vorkurs Mathematik

Prof. Dr. Michael Junk
Dr. Duc Khiem Huynh

Wintersemester 2016/17

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieser Vorkurs hat das Ziel, die weit verbreiteten Anfangsschwierigkeiten beim Studium des Fachs Mathematik an der Universität abzudämpfen. Der Grund für diese Schwierigkeiten ist dabei wohl die, im Vergleich zum Mathematikunterricht in der Schule, sehr unterschiedliche Zielsetzung. Während in der Schule über viele Jahre die Frage „*Wie* geht das?“ im Vordergrund stand, hat an der Universität plötzlich die Frage „*Warum* geht das?“ allerhöchste Priorität.

Dieser kleine Wechsel von *Wie* nach *Warum* hat enorme Konsequenzen. In der Schule kann man sehr gut in Mathematik sein, wenn man vorgegebene Rechenregeln (z.B. die der Bruchrechnung) oder vorgegebene Algorithmen (etwa schriftliches Dividieren oder Kurvendiskussion) nicht vergisst und korrekt anwenden kann. An der Universität wird diese Fähigkeit quasi stillschweigend vorausgesetzt. Für die Note *sehr gut* reicht sie aber auf keinen Fall, denn Mathematik an der Hochschule bedeutet nicht Fortführung der Schulmathematik mit noch mehr Rechenregeln für noch kompliziertere Objekte. Der entscheidende neue Aspekt ist die Fähigkeit, verstehen und präzise erklären zu können, *warum* gewisse mathematisch Regeln und Zusammenhänge gelten. Nur wer sich diese Fähigkeit aneignet, kann neue Zusammenhänge und Regeln finden, wodurch die Mathematik wächst und sich wandelt und damit lebendig bleibt. Damit wird der leider oft eher maschinelle Umgang mit Mathematik in der Schule durch einen kreativen Zugang ersetzt und genau dieser schöpferische Aspekt macht Spaß!

Konkret äußert sich der Wechsel von *Wie* nach *Warum* darin, dass alle mathematischen Aussagen *bewiesen* werden. Der Beweis ist das *Darum!* auf die Frage *Warum?*. Deshalb wimmelt es in Vorlesungen und Hausaufgaben so von Beweisen.

Es geht also in der Mathematik in erster Linie um sauberes, präzises Argumentieren und Erklären. Die Vermittlung dieser Fähigkeit ist das eigentliche Lernziel an der Universität. Allerdings lässt sich Erklären nicht auswendig lernen wie Bruchrechnen. Ein Rezept für Erklärungen gibt es nicht. Jede neue Fragestellung ist eine neue Herausforderung. Trotzdem ist die Fähigkeit erlernbar. Wenn Sie sich viele Erklärungen (Beweise) genau ansehen und die Gedankengänge selbständig nachvollziehen, wird ihr Gehirn nach einiger Zeit wiederkehrende Muster im Erklären und Argumentieren erkennen – Sie lernen Mathematik zu machen.

Aus dem bisher Gesagten wird klar, dass der Studienbeginn mit einem Perspektivenwechsel verbunden ist. Um eine neue Perspektive anzunehmen, ist es natürlich wichtig, diese überhaupt zu kennen. Hier soll Ihnen der Vorkurs eine Hilfestellung geben.

1 Anmerkungen zur Hochschulmathematik

In einem Zeitraum von mehreren tausend Jahren haben die Menschen die Wissenschaft *Mathematik* entwickelt, um die von ihnen beobachteten Gesetzmäßigkeiten und Ordnungen in ihrer Umwelt zu beschreiben. Dabei bedeutet *Mathematik machen* nicht nur *Rechnen* bzw. Anwendung von vorgegebenen Regeln, sondern vor allem das Entwickeln *neuer* Regeln und Ordnungsstrukturen, die dabei helfen sollen, die Welt besser zu verstehen.

In diesem Zusammmenhang haben sich eine spezielle *Fachsprache*, eine eigene *Symbolik* sowie eine angepasste *Methodik* entwickelt. Die Formulierung mathematischer Sachverhalte benutzt z.B. Sprachelemente der Logik und Mengenlehre und seit ungefähr einhundert Jahren beruht die Vorgehensweise beim Entwickeln neuer mathematischer Theorien auf der so genannten axiomatischen Methode. Im Vergleich zu anderen Wissenschaften ist die Besonderheit der Mathematik, dass Begriffe und Argumentationen extrem *präzise* genutzt werden. Der Umgang mit dieser Präzision sowie mit der hohen Dichte des über viele Jahre hinweg gesammelten und stark vernetzten Wissens kann zu Studienbeginn erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Dies etwas abzumildern ist das Ziel des Vorkurses.

Vom Gymnasium sind Sie an eine bestimmte Form des Lernens und an einen bestimmten Umgang mit Mathematik gewöhnt. Sie werden sehen, dass sich Ihr Mathematikstudium an der Universität deutlich davon unterscheidet. Einige Gründe für diesen Unterschied sind in den folgenden Abschnitten beschrieben.

1.1 Kondensiertes Wissen

Die Ursprünge des Gebiets „Analysis” liegen im 17. Jahrhundert und sind verbunden mit den Namen Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz. Seit dieser Zeit wurde eine riesige Menge praktischer Erfahrungen mit Konzepten wie Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit gesammelt. Die vielen Anwendungsbeispiele wurden zu abstrakteren Aussagen verdichtet, Beziehungen zwischen Konzepten wurden entdeckt, nicht vorhandene (aber oft intuitiv vorausgesetzte) Beziehungen wurden durch geschickte Gegenbeispiele widerlegt.

Das Destillat aus diesem mehr als dreihundert jährigen Prozess wird Ihnen nun in drei Semestern serviert. Der Vorteil: Sie sind 200x schneller fertig! Der Nachteil: Sie lernen die abstrahierten Konzepte aber nicht die vielen Beispiele, Gedankengänge und Irrwege, die zur Abstraktion führten und die zu einem tiefer gehenden Verständnis unverzichtbar sind.

Der einzige Ausweg: Sie müssen sich Beispiele ansehen, Sie müssen Gedankengänge selbst durchführen und eigene Irrwege durchlaufen (Stichwort „wie würde ich das denn machen"). Kurzum, Sie müssen dem Destillat, das in der Vorlesung vermittelt wird wieder „Wasser" hinzufügen, d.h. jedes abstrakte Konzept sofort an *mehreren* Bespielen studieren, beobachten und ausprobieren. Ansonsten ist das Destillat ungenießbar und führt zu Magenverstimmungen.

Gleiches gilt für den Bereich Algebra und Geometrie, mit dem kleinen Unterschied, dass hier noch wesentlich mehr Zeit zum Konzept-Kondensieren zur Verfügung stand. Bereits die Babylonier beschäftigten sich mit algebraischen Fragestellungen und die Geometrie wurde in Griechenland vor knapp zweitausend Jahren bereits sehr weit entwickelt.

Auch hier gilt: immer Beispiele zu abstrakten Konzepten studieren (oder besser noch, eigene Beispiele konstruieren und dann studieren).

1.2 Präzise Ausdrucksweise

Wie bereits angedeutet, gehört es zu den Zielsetzungen der Mathematik, Gesetzmäßigkeiten und Ordnungsstrukturen zu entdecken. Eine unklare bzw. mehrdeutige Sprache wie die Umgangssprache ist allerdings für die Beschreibung von präzisen Gesetzmäßigkeiten ungeeignet. Den in der mathematischen Fachsprache benutzten Vokabeln werden deshalb in so genannten *Definitionen* jeweils unmissverständliche Bedeutungen zugewiesen.

Bei Begriffen wie *Untervektorraum*, *Spuroperator* oder *kompakte Mannigfaltigkeit* gibt es kaum Verwechslungsgefahr mit Alltagskonzepten und man wird automatisch die genaue Definition zu Rate ziehen, wenn man mit den Objekten arbeitet. Gefährlicher sind da schon Begriffe wie *natürliche Zahl*, *unbeschränktes Gebiet*, *glatte Kurve*, *Inhalt* oder *Wahrscheinlichkeit*, die auch in der Umgangssprache eine ähnliche Bedeutung haben. Hier muss man sorgfältig darauf achten, die präzise mathematische Bedeutung zu verwenden und nicht die umgangssprachliche.

Am Beispiel des Wortes *oder* soll dies etwas genauer beleuchtet werden. In der Umgangssprache denkt man bei Aussagen wie *Alfons kauft Fleisch oder Fisch*, dass Alfons *entweder* mit Fleisch oder mit Fisch nach Hause kommt. Das mathematische *oder* umfasst aber auch den Fall, dass beide Ereignisse eintreffen. D.h.

Alfons kauft Fleisch oder Fisch ist kompatibel mit drei Fällen (1) Alfons kauft nur Fisch, (2) Alfons kauft nur Fleisch, (3) Alfons kauft Fisch und Fleisch. Denkt man in einer mathematischen Argumentation bei dem Wort *oder* unpräzise an die umgangssprachliche Zweitbedeutung *entweder oder* dann entgleitet ein möglicher Fall der Aufmerksamkeit, was natürlich gravierende Auswirkungen haben kann.

Es ist in der Mathematik also besonders wichtig, auf die Sprache zu achten: Worte haben genau geregelte Bedeutung und es kommt auf jedes Detail an. Beachtet man das nicht, sind Aussagen schnell falsch und „Ich hatte es aber doch so gemeint" hilft nicht weiter.

Schon Goethe kommentierte die besondere Sprachnutzung in der Mathematik:

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen; redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsbald ganz etwas anders.

Die Präzision bezieht sich aber nicht nur auf das Formulieren von Aussagen sondern auch auf die logische Argumentation. Nach genau festgelegten Regeln werden hierbei aus gegebenen wahren Aussagen neue wahre Aussagen abgeleitet. Die abgeleitete Aussage nennt man dabei einen *Satz* und den Nachweis, dass die Aussage wahr ist, einen *Beweis*.

Prinzipiell besteht ein Beweis also aus einer Kette von wahren Aussagen die mit genau angegebenen logischen Schlussregeln verknüpft werden. Diese Vorgehensweise hat einen riesigen Vorteil; denn sie erlaubt es jedem die Argumentation genau nachzuprüfen. Selbst Beweise des größten Mathematikers können prinzipiell vom Studierenden im ersten Semester überprüft und für korrekt bzw. inkorrekt befunden werden. Dazu muss nämlich nur nachgesehen werden, ob die als wahr benutzten Aussagen tatsächlich wahr sind, d.h. wieder Sätze sind, und ob die logischen Schlussregeln korrekt sind und korrekt benutzt werden (diesen Prozess werden wir uns in Kapitel 2 ansehen).

Die Präzision der Formulierung und Schlussfolgerung verhindert also in der Mathematik, dass Aussagen als wahr bezeichnet werden, nur weil mächtige Personen das gerne hätten. Dies ist ein sehr angenehmer Aspekt!

Andererseits hat absolute Präzision aber auch den Nachteil, sehr zeitraubend und umständlich zu sein. Aus diesem Grund werden Sie kaum einen Beweis finden, in dem wirklich *alle* benutzten wahren Aussagen als solche aufgeführt wurden und genauso wird nicht *jede* benutzte Schlussregel angegeben. Diese Nachlässigkeit führt dann dazu, dass es für Studierende im ersten Semester doch wieder schwierig wird, Beweise zu verstehen und fast unmöglich, Beweise in Forschungsarbeiten nachzuvollziehen.

Wie kommt es dazu? Stellen Sie sich eine Gruppe von Mathematikern vor, die Beweise stets in absoluter Präzision (d.h. in größter Ausführlichkeit) angeben. Nach einiger Zeit stellt sich heraus, dass bestimmte Argumentationsabläufe immer wieder sehr ähnlich sind. Irgendwann werden die Gruppenmitglieder sich darauf einigen, diese immer sehr ähnlichen Schritte nicht mehr im Detail auszuschreiben, um Papier und Zeit zu sparen. Sie schreiben zur Abkürzung nur noch *daraus folgt*, oder *daher*, oder *und damit ergibt sich*, oder einfach gar nichts, da jeder in der Gruppe in der Lage ist, die Details nachträglich wieder einzufügen. Diese Vorgehensweise ist effektiv innerhalb der Gruppe, erschwert aber offensichtlich dem Neueinsteiger das Verständnis.

Die einzige Möglichkeit für den Neuling, die unpräzise Darstellung zu verstehen, besteht darin, den Gruppenprozess zu wiederholen. Die mühsame Anfangsphase des sehr genauen Aufschreibens muss durchlaufen werden, die immer wieder auftretenden Schlussweisen müssen selbst entdeckt werden, bis es langweilig wird, sie stets im Detail anzugeben. Erst wenn Klarheit besteht, wie Beweise auf dem höchsten Präzisionslevel zu führen sind, darf man Abkürzungen benutzen! Wer versucht, die Beweisführung erfahrener Mathematiker einfach nachzumachen, ohne zu wissen, wie der präzise Beweis aussehen müsste, ist in großer Gefahr, falsche Beweise zu produzieren.

Was bedeutet das für Sie? In diesem Vorkurs wird gezeigt, wie das Beweisen auf der höchsten Präzisionsebene funktioniert. Sie werden dabei sehen, dass dies zwar sehr aufwendig ist, aber letztlich wenigen einfachen Regeln folgt. Mit diesem Wissen ausgestattet können Sie sich dann Vorlesungen anhören und sie anschließend in Eigenarbeit auf Ihren aktuellen Präzisionslevel *übersetzen*. Dazu aber mehr im nächsten Abschnitt.

1.3 Kreativität und Anschauung

Nach dem bisher Gesagten mag es so aussehen, als ob die Mathematik eine Maschinerie sei, um mit vorgegebenen Schlussregeln aus wahren Aussagen andere wahre Aussagen abzuleiten. Diese Sichtweise ist allerdings sehr verkürzt und würde sicherlich nicht erklären, warum sich viele Menschen leidenschaftlich mit Mathematik beschäftigen.

Mathematik machen ist tatsächlich ein kreativer Prozess und ähnelt oft einer Schatzsuche verknüpft mit Gefühlen wie Spannung, Freude, Ehrgeiz, Wut, Überraschung, Frustration, Mühe, Euphorie und Glück. Kreativität ist gefordert, um in einer bestehenden Theorie neue Fragestellungen zu formulieren bzw. neue Zusammenhänge zwischen den Objekten der Theorie zu entdecken.

Besonders reizvoll ist es auch, Fragestellungen anderer Wissenschaften zu mathematisieren d.h. mathematische Objekte zu kreieren bzw. zu definieren, um die Fragestellung mathematischen Methoden zugänglich zu machen (diese Arbeit wird als mathematisches *Modellieren* bezeichnet). Ist die Fragestellung in Mathematik übersetzt, ergeben sich schnell interessante Folgefragen (hin und wieder auch ganz neue Theorien) und es hat einen besonderen Reiz, die gefundenen mathematischen Ergebnisse in die Sprache des Ausgangsproblems zurück zu übersetzen.

Auch wenn es darum geht, eine mathematische Aussage zu beweisen, ist viel Kreativität gefordert. Beweisen geht nicht nach Rezeptbuch! (Im Gegensatz zum Nachvollziehen von Beweisen, was eine fast mechanisch durchführbare Aufgabe ist.) Einen Beweis zu finden gleicht eher dem Zusammensetzen eines Puzzles mit der zusätzlichen Schwierigkeit, dass mehr Teile als benötigt zur Verfügung stehen [7, 6]. Das Puzzlebild (die mathematische Aussage) ist bekannt aber wie setzt man es zusammen? Gewisse Techniken gibt es natürlich schon, aber klare Rezepte wie z.B. *nimm ein Teil und probiere alle anderen durch, bis ein passendes Nachbarteil gefunden ist* funktionieren nur bei sehr kleinen Puzzles. Die Baustrategien sind eher vage und oft abhängig vom Puzzlebild (z.B. *fange mit Randstücken an*, *suche Teile mit ähnlicher Farbe oder Textur*). Auf jeden Fall erfordert Puzzle bauen Kombinationsgabe, Spürsinn und Mustererkennung. Genau das gleiche gilt beim Beweisen und wie beim puzzlen ergibt sich die Regel *Wenn es nicht auf Anhieb klappt, nicht einfach aufgeben, sondern an einer anderen Ecke einen neuen Anlauf versuchen.*

Eine wichtige Voraussetzung um mit mathematischen Objekten kreativ zu arbeiten ist Anschauung. Zu jedem abstrakten Objekt muss man gute Beispiele kennen und unterschiedliche Anwendungsmöglichkeiten selbst ausprobiert haben. Nur diese Vertrautheit erlaubt es, ein Objekt kreativ einsetzen zu können. Dabei unterscheiden sich mathematische Objekte und Konzepte nicht von anderen Werkzeugen wie etwa den Werkzeugen eines Tischlers. Um mit ihnen kreativ arbeiten zu können muss man die verschiedenen Einsatzmöglichkeiten an konkreten Beispielen studiert haben. Dass viel Übung nötig ist, um mit den Werkzeugen kunstvoll umgehen zu können, versteht sich von selbst. Das Gleiche gilt für die mathematischen Werkzeuge.

1.4 Forschen statt pauken

Was sind eigentlich die Voraussetzungen für erfolgreiches Studieren? Zunächst einmal ist Studieren ein Lernprozess, denn es geht um die sehr genaue geistige Durchdringung eines Themengebietes. Deshalb hat erfolgreiches Studieren viel mit erfolgreichem Lernen zu tun.

Wie das funktioniert, zeigen uns am besten kleine Kinder die Gehen oder Sprechen lernen. Ihr Lernprozess besteht aus einer Wiederholung von beobachten, nachmachen, experimentieren, üben, nachmachen, experimentieren, beobachten... Lernprozesse verlangen eine intensive *selbständige* Beschäftigung mit dem Lerngegenstand. Diese kreative eigenständige Beschäftigung ist wichtig und nicht die Zeit, die dafür erforderlich ist. Lernen wird nicht in Stunden gemessen, sondern in Anzahl der Aha-Erlebnisse, d.h. der selbständig gewonnenen Einsichten.

Betrachten Sie folgende Analogie: Klavierspielen (Mathematik) hat noch *niemand* allein durch den Besuch von Konzerten (Vorlesungen) gelernt. Konzerte zeigen nur *was* gespielt werden kann und vielleicht können Sie einige Griff*techniken* beobachten. Um Klavierspielen zu lernen, müssen Sie aber selbst auf die Tasten drücken! Es nützt auch nichts, wenn Sie viel über die Technik des Klavierspielens lesen und viel Zeit mit Büchern verbringen. Bücher sind wichtig als Anleitungen, aber das eigenhändige selbständige Umgehen mit dem Instrument (der Mathematik) können Sie nicht ersetzen.

Die Vorlesungen versorgen Sie also mit geistigem Futter: sie stellen Themengebiete vor, sie geben Anregungen, es werden Tricks und Kniffe verraten und sie bieten die Möglichkeit Fragen zu stellen und zu diskutieren. Auf jeden Fall werden Sie hier in schneller Folge mit neuen Konzepten (Inhalten) *und* neuen Argumentationsformen (Logik) konfrontiert.

Essen und verdauen müssen Sie das Futter aber selbst! So ist es oft aus Zeitgründen nicht möglich, bei der Darstellung von Beweisen in der Vorlesung stets die kleinstmöglichen logischen Argumentationsschritte zu machen. Verdauen heißt dann, dass Sie die fehlenden Schritte *selbständig* nachträglich hinzufügen, bis Ihnen absolut klar ist, wie die präzise Darstellung des Beweises aussehen müsste. Dies hat mehrere Vorteile. Zum einen müssen Sie eigenständig argumentieren und Symbole benutzen, wobei Sie die mathematische Sprache und Schrift erlernen. Zweitens wiederholen Sie automatisch die Vorlesung sehr gründlich. Drittens bemerken Sie genau, ob und was Sie nicht verstehen und schließlich gewinnen Sie Sicherheit auf dem Level der präzisen Darstellung.

Die Weiterführung der Analogie zwischen Wissen und Futter zeigt uns, dass ein erfolgreiches Studium auch sehr viel Wissenshunger erfordert. Der Wissenshunger ist der Antrieb, der nötig ist, um die Energie und Zeit aufzuwenden, die für das Lernen nötig ist. Außerdem werden wissenshungrige Studierende einen Sachverhalt nicht mit dem Satz *Das ist halt so.* auf sich beruhen lassen, sondern mit der Frage *Warum ist das so?* nach Gründen und Ursachen suchen. Dabei wird das Fragenstellen in Vorlesungen und Übungen oder im Zimmer des Assistenten oder Dozenten *nicht* als Zeichen von Dummheit gewertet. Im Gegenteil. Es wird als

Zeichen einer echten Bemühung verstanden, als Zeichen für echten Wissenshunger, als Zeichen für die richtige Geisteshaltung (siehe auch die Diskussion in [5]). Trauen Sie sich, mit Ihren Fragen an andere heranzutreten. Sie werden feststellen, dass es sich lohnt.

Möglicherweise ist Ihnen diese forschende Geisteshaltung neu, weil sie in der Schule nicht so notwendig war. Dort wurde Ihnen das Wissen in kleinen wohldosierten Mengen verabreicht. Es war stets klar, was gerade gelernt wurde und jedes Konzept wurde hinreichend lange eingeübt. Das ist an der Universität anders. Hier steht das selbständige Lernen im Vordergrund.

Das fängt damit an, dass Sie selbständig das für Sie passendste Lehrmaterial auswählen. Die Bibliothek enthält z.B. eine Vielzahl von Büchern zu den Anfängervorlesungen. In jedem Buch ist die Sprache und Erklärweise etwas anders. Wenn Sie eine Frage haben, schauen Sie einfach in *mehreren* Büchern mal nach, wie die Autoren den Sachverhalt erklären. Trifft ein Autor genau ihr Verständnisproblem und löst es für Sie befriedigend auf, dann ist das gefundene Buch vielleicht auch an anderen Stellen *Ihr* Buch. Also immer mal wieder stöbern. Als Startpunkt für ausführlich erklärende Autoren im Bereich Analysis können Sie bei [2, 3] reinschnuppern. In der linearen Algebra sind vielleicht [1, 4] für Sie interessant? Auf jeden Fall schauen Sie sich rasch an, wie der Bibliothekskatalog und die Aufstellsystematik funktioniert, damit der Büchersuche nichts im Wege steht. Natürlich wimmelt es auch im Internet von Vorlesungsskripten ganz unterschiedlicher Qualität. Auch hier lohnt es sich, mal nachzusehen.

Neben dem selbständigen Umgang mit Literatur, ist es sehr wichtig, dass Sie selbst überprüfen, was Sie bereits gut und was noch nicht so gut verstanden haben, um dann gezielt an den Problemstellen zu arbeiten. Sie müssen lernen, kritisch mit sich selbst zu sein, eigene Fragen formulieren zu Dingen, die Sie nicht richtig verstehen und dann gezielt nach Antworten auf diese Fragen suchen, durch Selbstdenken, in Büchern, oder bei Ihren Mitstudierenden oder Lehrern. Diese innere Einstellung ist eine wichtige Voraussetzung für ein erfolgreiches Studium und wird Sie letztendlich zu einem Forscher bzw. einer Forscherin machen.

1.5 Lernziele des Vorkurses

Mit dem Vorkurs werden konkrete Lernziele verfolgt, die den Einstieg in den üblichen mathematischen Vorlesungsbetrieb erleichtern sollen.

- Entwicklung des Gefühls für *klare* mathematische Argumentationen.

Dazu werden in Kapitel 2 die elementaren Beweisschritte vorgestellt. Jede klare Argumentation ist eine zulässige Verkettung dieser wenigen Schritte in immer neuen Konstellationen.

- Verankerung der Strategie: *Ist eine Argumentation unklar, so fehlen ein oder mehrere elementare Beweisschritte - sie müssen gefunden und eingefügt werden (durch Selbstdenken und Nachfragen).*

Ergebnis von Kapitel 2 wird auch sein, dass Klarheit etwas kostet, nämlich *Zeit*. Kleinschrittiges und damit klares Argumentieren führt oft zu langen Erklärungen. Dagegen steht der menschliche Wunsch nach Ersparnis von Zeit und Gehirnspeicherplatz - die sogenannte *Konzentration auf das Wesentliche*. Dabei gilt aber folgende wichtige Regel

- Nur wer aus dem Wesentlichen einer Argumentation alle einzelnen Beweisschritte rekonstruieren kann, darf sich auf das Wesentliche beschränken.

In den Kapiteln 3 und 4 werden neue mathematische Begriffe präsentiert und der Umgang mit ihnen trainiert. Hier ist das Lernziel

- Keine Angst vor neuen Begriffen! Der Umgang mit Begriffen verläuft in der Mathematik immer nach dem gleichen Muster. Was die neuen Begriffe *bedeuten*, wird man durch deren Benutzung in verschiedenen Situationen erkennen.

Bei Begriffen und Objekten, die bereits aus der Schule bekannt sind (wie zum Beispiel die natürlichen Zahlen) ist das Lernziel etwas anders:

- Für den Umgang mit alten Begriffen gelten die gleichen Regeln wie für die neuen Begriffe. Schwierig ist hier, nicht in möglicherweise unreflektierte Denkmuster aus der Schulzeit zurückzufallen.

Im Mathematikalltag wird an vielen Stellen und aus unterschiedlichsten Gründen von den in diesem Vorkurs vorgestellten Zugang abgewichen. Das reicht von unterschiedlichen Schreibweisen bis hin zu verkürzten Beweisen, die zwar die Hauptidee der Argumentation beschreiben, nicht aber alle einzelnen Beweisschritte. Das Kapitel 5 bereitet auf diese unterschiedlichen Ansätze vor mit dem Lernziel

- In anderen Darstellungsformen von Mathematik sollen die zentralen Ideen wiedererkannt werden.

Damit die Beschäftigung mit den grundlegenden Details des Mathematikmachens nicht den Blick auf die Möglichkeiten verstellt, die aus der Beherrschung der Techniken erwachsen, werden in Kapitel 6 ausgewählte Themen aus höheren Semestern vorgestellt. An solchen oder ähnlichen interessanten Fragestellungen können Sie sich dann später in Ihrem Studium erproben.

2 Mathematik - ein Sprachkurs

Eine grundlegende menschliche Erfahrung ist das Wahrnehmen von Regelmäßigkeiten, Mustern und Zusammenhängen in der Umwelt. So sind Beobachtungen der Art *Wenn ich den Ball loslasse, dann fällt er auf den Boden* jedem von uns sehr früh geläufig.

Dabei ist das Mustererkennen nicht nur auf die unmittelbaren Sinneseindrücke beschränkt, sondern dehnt sich auch auf Teile unserer eigenen Denkprozesse aus. Insbesondere können wir Muster im Mustererkennen finden, wobei wir einen Teil dieser abstrakteren Muster *logische Regeln* nennen. Sie beschreiben zum Beispiel, dass eine Regelmäßigkeit der Form *wenn blabla, dann blupblup* in Kombination mit dem Muster *wenn blupblup, dann schwipschwap* einen neuen Zusammenhang der Form *wenn blabla, dann schwipschwap* ergibt.

Durch intensives Beobachten unserer Umwelt und der Muster in den dabei erkannten Mustern hat jeder Mensch eine gute Grundausbildung im Umgang mit Logik. Allerdings sind kompliziertere Zusammenhänge, deren Erklärung eine größere Zahl geschickt ins Spiel gebrachter logischer Regeln erfordert, intuitiv nicht mehr leicht zu erfassen. Um auch hier den Überblick zu behalten, hat sich im Laufe der Zeit ein standardisiertes Vorgehen beim Beschreiben und Untersuchen von logischen Mustern entwickelt, das wir *mathematisches Arbeiten* nennen. Es umfasst eine präzise geregelte Sprache mit klaren Vorschriften über das Einführen neuer Begriffe und über zulässige Argumentationsweisen.

Ziel dieses Vorkurses ist es, das mathematische Arbeiten und die dabei benutzte Sprache vorzustellen. Wie in jedem Sprachkurs werden wir dabei die Grundvokabeln der Sprache Schritt für Schritt einführen und die Regeln des mathematischen Arbeitens an vielen Beispielen kennenlernen.

2.1 Los geht's

In der mathematischen Sprache spielen die Vokabeln *Begriff* und *Zuordnung* eine ganz besondere Rolle.

Einige Namen bekannter mathematischer Begriffe sind Menge, Körper, Vektorraum oder Folge. Die Namen können dabei auch in Form von Adjektiven auftreten wie etwa stetig, beschränkt, differenzierbar oder linear. Zu jedem dieser Begriffe gehört eine genau festgelegte *Bedingung*, die erfüllt sein muss, damit ein mathematisches Objekt als *Beispiel* des Begriffs anerkannt wird.

Der Begriff, mit dem wir uns zu Beginn am meisten beschäftigen, ist *Wahrheitswert*. Seine Beispiele bezeichnen wir mit *wahr* und *falsch*.

Wahrheitswerte treten als Ergebnisse vieler Zuordnungen auf. Unser erstes Beispiel ist die *Gleichheit*-Zuordnung, die jedem Paar von Objekten einen Wahrheitswert zuweist. Für die Benennung des Zuordnungsergebnisses gibt es dabei folgende Tradition: Man gibt der Zuordnung einen Namen (in unserem Fall könnten wir *Gleichheit* wählen) und schreibt hinter diesen Namen in runden Klammern, welchen Objekten ein Wert zugeordnet wird, bei uns also beispielsweise

$$\text{Gleichheit}(\text{wahr}, \text{wahr})$$

Die aufgelisteten Objekte nennt man dabei die *Argumente* der Zuordnung.

Ist F allgemein der Name einer Zuordnung und ist x ein zulässiges Argument von F dann spricht man das Ergebnis $F(x)$ normalerweise als *F von x* aus, d.h. beim Lesen ersetzt man die öffnende Klammer durch das Wort *von*. In unserem Fall führt diese Konvention allerdings auf das holprige Satzfragment *Gleichheit von wahr, wahr* während man in der natürlichen Sprache eher *wahr ist gleich wahr* sagen würde. Die Zuordnungsbeschreibung wird hier also *zwischen* die Argumente und nicht *vor* die Argumente gesetzt. Zusätzlich kürzt man bei häufig verwendeten Zuordnungen den Namen durch ein Symbol ab, d.h. wir schreiben $\text{wahr} = \text{wahr}$ und sprechen das Symbol $=$ beim Lesen als *ist gleich*.

Unabhängig davon, ob wir das Ergebnis der Gleichheitszuordnung in der sogenannten *Präfix*-Form $\text{Gleichheit}(A, B)$ notieren, oder in der *Infix*-Notation $A = B$, steht der jeweilige Ausdruck nun also für einen der beiden Werte *wahr* bzw. *falsch*. Allgemein nennt man solche Ausdrücke, die einen Wahrheitswert darstellen, *Aussagen* und Zuordnungen, die Aussagen als Ergebnisse liefern, nennt man *Aussageformen*.

Während wir also wissen, dass jede Aussage entweder für *wahr* oder für *falsch* steht, ist uns nicht bei jeder Aussage bekannt, welcher Wert es denn tatsächlich ist. Und genau hier wird Mathematik spannend wie eine Schatzsuche! Wie diese Schatzsuche genau durchgeführt wird, können wir schon im nächsten Kapitel sehen, wo die ersten kleinen Schätze gehoben werden. Vorher müssen wir aber zunächst einen kleinen Vorrat an Aussageformen kennenlernen.

Da das Ergebnis der Gleichheit Zuordnung wieder ein mathematisches Objekt ist, kann es auch als Argument einer neuen Gleichheitszuordnung verwendet werden, d.h. wir können Zuordnungsketten bilden wie etwa in folgender Präfix-Schreibweise

Gleichheit(Gleichheit(Gleichheit(wahr, falsch),
Gleichheit(wahr, falsch)), wahr)

Um diese Aussage in die deutlich besser lesbare Infix-Schreibweise zu übertragen, ersetzen wir zunächst den Präfix-Ausdruck Gleichheit(wahr, falsch) im Innern durch den entsprechenden Infix-Ausdruck wahr = falsch

Gleichheit(Gleichheit(wahr = falsch, wahr = falsch), wahr)

Bei der Ersetzung des nun inneren Präfix-Ausdrucks ist es wichtig, Klammern um die Argumente zu setzen, da diese selbst Infix-Ausdrücke sind. Wir kommen also zu

Gleichheit((wahr = falsch) = (wahr = falsch), wahr)

und schließlich zur reinen Infix-Schreibweise

((wahr = falsch) = (wahr = falsch)) = wahr

Für mathematische Untersuchungen ist es wichtig, dass Aussagen *gelten* können. Ganz grundlegende Aussagen, deren Gelten für das Errichten des gesamten Mathematikgebäudes wichtig sind, nennt man *Axiome*. Ein Beispiel eines solchen Axioms ist

Es gilt wahr;

Im Laufe des Sprachkurses werden wir noch weitere Axiome kennenlernen. Zur Übersicht sammeln wir die hinzukommenden Axiome am Ende jedes Abschnitts und nummerieren sie fortlaufend durch.

Das Besondere an geltenden Aussagen ist, dass sie *Argumentationsmöglichkeiten* eröffnen. Gilt zum Beispiel eine Aussage der Form $A = B$, so können A und B in anderen geltenden Aussagen gegeneinander ausgetauscht werden, ohne dass dabei die gilt-Eigenschaft verloren geht. Als Beispiel nehmen wir an, dass neben $A = B$ auch $A =$ wahr gilt. Dann können wir etwa in der zweiten Aussage A durch B ersetzen, wobei die resultierende Aussage $B =$ wahr nun ebenfalls gilt.

Mit den Argumentationsmöglichkeiten können also aus vorhandenen geltenden Aussagen neue geltende Aussagen erzeugt werden. Man nennt diese Möglichkeiten auch *Beweisschritte* - im Fall der Gleichheitsaussagen spricht man spezieller auch vom Ersetzungsschritt.

Tatsächlich ist es so, dass der Vorrat an geltenden Aussagen *allein* durch Beweisschritte vergrößert werden kann. Mathematische Argumentationen bestehen deshalb aus einer fortlaufenden Aneinanderreihung von wenigen grundlegenden Schritten in immer neuen und cleveren Kombinationen.

Steht A für eine Aussage, von der wir wissen wollen, ob sie zum Beispiel für *wahr* steht, dann besteht unsere Schatzsuche aus dem Nachweis, dass $(A = \text{wahr})$ *gilt*. Normalerweise erreicht man dieses Ziel nicht mit einem einzigen Beweisschritt, sondern es sind mehrere Schritte geschickt zu einem Weg zu verbinden, der den Vorrat an geltenden Aussagen solange vergrößert, bis die gewünschte Aussage dazugehört. Den richtigen Weg zum Schatz zu finden, ist die Herausforderung!

Neben den Axiomen werden wir auch die hinzukommenden Beweisschritte im Verlauf des Sprachkurses jeweils am Ende eines Abschnitts sammeln.

Als weitere Aussageform spielt die *Beispiel*-Zuordnung eine zentrale Rolle. Sie ordnet einem Paar bestehend aus einem Objekt und einem Begriff einen Wahrheitswert zu. Als Infix-Abkürzung für das Zuordnungsergebnis vereinbaren wir in diesem Kurs das Doppelpunktsymbol. Die Aussage $A : \text{Menge}$ liest man dann als *A ist eine Menge*, $V : \text{Vektorraum}$ als *V ist ein Vektorraum*, $f : \text{stetig}$ als *f ist stetig* und abstrakte Ausdrücke $x : B$ als *x ist ein Beispiel von B*. Die Präfix-Version zu $x : B$ wäre hier $\text{Beispiel}(x, B)$. Welche Argumentationsmöglichkeiten geltende Beispiel-Aussagen eröffnen, werden wir in einem späteren Abschnitt diskutieren.

Zusammenfassung
Wir beginnen hier mit unserer fortlaufenden Liste von Axiomen. Dabei notieren wir in der zweiten Spalte die Aussagen, die axiomatisch gelten. Das Kürzel in der ersten Spalte erlaubt uns, auf die jeweiligen Axiome zu verweisen.

(A1)	wahr

Der erste vorgestellte Beweisschritt betrifft die Ersetzung von Ausdrücken. Er gehört zu den Schritten, deren Anwendung das Gelten eines bestimmten Aussagetyps verlangt.

Beim sorgfältigen Aufschreiben der Beweisschritte sollte jeweils der Name des Schritts erwähnt werden und die geltende Aussage, die eine Anwendung ermöglicht, sowie eventuelle Zusatzinformationen, die in der Hinweisspalte angegeben sind. Die grau hinterlegte Zeile zeigt beispielhaft, wie der Beweisschritt innerhalb eines Beweises formuliert werden kann.

Ersetzung	
Wobei hilft mir	$A = B$
zum Nachweis von	V, wenn es eine geltende Aussage U gibt, aus der durch selektives Austauschen von A und B die Aussage V entsteht.
Beweistext	Wegen $A = B$ und U gilt auch V.

Weitere wichtige Vokabeln sind

Aussage	Ein Zuordnungsausdruck, der einen Wahrheitswert darstellt.
Axiom	Eine Aussage, die ohne mathematische Begründung gilt. Axiome bilden Ausgangspunkte von Argumentationen.
Präfix-Ausdruck Infix-Ausdruck Postfix-Ausdruck	Der Zuordnungsname oder ein Zuordnungssymbol steht vor, zwischen bzw. hinter den Argumenten.
Aussageform	Eine Zuordnung, deren Ergebnisse Wahrheitswerte sind.

Aufgabe 2.1. Notieren Sie folgende Aussagen mit der Beispiel- bzw. der Gleichheit-Zuordnung jeweils in Präfix- und Infix-Schreibweise.

1. Falsch ist ein Wahrheitswert.
2. Wahrheitswert ist ein Begriff.
3. Die Aussage, dass wahr und falsch gleich sind, ist ein Wahrheitswert.
4. Die Aussage, dass wahr und falsch gleich sind, ist gleich dem Objekt falsch. Insgesamt ist diese Aussage ein Wahrheitswert.

Aufgabe 2.2. Schreiben sie folgende Aussagen in umgangssprachlicher Form:

1. X : topologischerRaum
2. (X : topologischerRaum) : Wahrheitswert
3. Ableitung(sin) = cos
4. Rand(A) : Teilmenge(A)
5. ((falsch = wahr) = falsch) = wahr

Aufgabe 2.3. Wir betrachten ein mathematisches Modell, in dem man Aussagen der Form *Peter lügt* oder *Monika behauptet, dass Peter lügt* treffen kann.

Dazu nehmen wir an, dass es einen Begriff *Person* gibt und eine Zuordnung, die jeder Person P einen Wahrheitswert zuweist (also eine Aussageform), den wir mit P *lügt* bezeichnen (hierbei handelt es sich um eine sogenannte Postfix-Schreibweise des Ergebnisses, da die Zuordnungsbezeichnung *hinter* dem Argument steht). Eine weitere Aussageform soll jedem Paar bestehend aus einer Person und einem Wahrheitswert A einen Wahrheitswert zuweisen, den wir mit P *behauptet* A bezeichnen.

Notieren Sie folgende umgangssprachlichen Aussagen mit den beiden Aussageformen. Achten Sie dabei auf korrekte Klammerung, wenn die Zuordnungen verschachtelt auftreten.

1. Monika ist eine Person.
2. Monika behauptet, dass Peter lügt.
3. Peter behauptet etwas Wahres.
4. Monika behauptet, dass Peter etwas Falsches behauptet.
5. Peter behauptet, dass Monika behauptet, dass er lügt.

Welche Konsequenz hat in diesem Modell, dass eine Zuordnung F jedem Argument x genau einen Wert $F(x)$ zuordnet?

2.2 Logische Verknüpfungen

In diesem Abschnitt stellen wir weitere grundlegende Zuordnungen vor, deren Argumente jeweils Aussagen sind und die auch als Ergebnis Wahrheitswerte liefern.

Sind A, B zwei Aussagen, dann weist ihnen die *und*-Zuordnung die mit $A \wedge B$ abgekürzte Aussage zu (lies A *und* B). Sie ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

Da A und B jeweils nur die beiden möglichen Wahrheitswerte annehmen können, stecken hinter dieser Vereinbarung die Axiome:

Es gilt (falsch $\wedge$ falsch) $=$ falsch;
Es gilt (falsch $\wedge$ wahr) $=$ falsch;
Es gilt (wahr $\wedge$ falsch) $=$ falsch;
Es gilt (wahr $\wedge$ wahr) $=$ wahr;

Etwas übersichtlicher können wir diese Information auch in einer sogenannten Wahrheitstabelle darstellen.

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Entsprechend bezeichnet $A \vee B$ das zu A, B gehörende Ergebnis der *oder*-Zuordnung. Vereinbarungsgemäß ist $A \vee B$ (lies A *oder* B) genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Dargestellt als Wahrheitstabelle finden wir

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Bei der oder-Zuordnung ist zu beachten, dass sie sich in ihrer Bedeutung manchmal vom umgangssprachlichen *oder* unterscheidet. So wären wir bei einer Aussage *Luca kauft Fisch oder Fleisch* wahrscheinlich überrascht, wenn Luca Fisch *und* Fleisch mitbringt. Vielmehr erwarten wir, dass nicht *mindestens eine* sondern *genau eine* der beiden Aussagen wahr ist. Diese zweite mögliche oder-Interpretation wird in der Mathematik *entweder-oder*-Zuordnung genannt. Wie die zugehörige Wahrheitstabelle lautet, ist Gegenstand von Aufgabe 2.4.

Das Gegenteil einer Aussage A kann mit der *nicht*-Zuordnung konstruiert werden, wobei wir $\neg A$ als Abkürzung für das Ergebnis benutzen. Dabei ist $\neg A$ genau dann wahr, wenn A falsch ist und umgekehrt.

A	$\neg A$
f	w
w	f

Nachdem nun einige Zuordnungen genauer bekannt sind, können wir uns auf eine erste kleinere Schatzsuche begeben. Unser Ziel ist herauszubekommen, welchen Wert kompliziertere Verknüpfungen von Wahrheitswerten besitzen, wie zum Beispiel $((\neg\ \text{wahr}) \wedge\ \text{falsch}) \vee\ \text{wahr}$. Um diesem Ausdruck einen Namen zu geben, schreiben wir zunächst in einer sogenannten *Definition*

$$X := ((\neg\ \text{wahr}) \wedge\ \text{falsch}) \vee\ \text{wahr};$$

Links von dem als *ist definiert durch* ausgesprochenen Zeichen := steht dabei der gewünschte Name und rechts davon der abzukürzende Ausdruck. Benutzt man nach der Definition den Abkürzungsnamen in einem Ausdruck, so ist damit eigentlich der längere Ausdruck gemeint, der entsteht, wenn statt X der abgekürzte Ausdruck benutzt würde.

Aus der Konstruktion heraus wissen wir, dass X ein Wahrheitswert ist und damit nur gleich *wahr* oder gleich *falsch* sein kann. Ob aber ($X = \text{wahr}$) gilt, oder doch

(X = falsch), ist dagegen nicht so ohne Weiteres klar. Machen wir uns also auf die Suche!

Bevor wir die genaue mathematische Argumentation angeben können, müssen wir zunächst einen groben Plan machen. Dazu betrachten wir den mit X bezeichneten Ausdruck genauer und erkennen, dass er die Form ($Y\vee$ wahr) hat, wobei Y für (($\neg$ wahr)$\wedge$ falsch) steht. Ein Blick in die Wahrheitstabelle zeigt uns, dass das Ergebnis der oder-Zuordnung auf jeden Fall *wahr* sein wird, egal ob Y für *wahr* oder für *falsch* steht - der Inhalt der Schatzkiste ist mit (X = wahr) also schon klar! Unklar ist dagegen weiterhin der Weg zum Schatz.

Um diesen genau angeben zu können, wird es wichtig sein, zu wissen, welche Zeile aus der oder-Tabelle wir eigentlich gerade benutzt haben. Wir müssen also den Wert von Y herausbekommen. Wenn wir uns daraufhin den Ausdruck Y genauer anschauen, so erkennen wir die Form $Z\wedge$ falsch. Die und-Wahrheitstabelle verrät uns, dass der Wert nur *falsch* sein kann. Um auch hier die genaue Zeile zu lokalisieren, müssen wir jetzt den Wert von Z also von $\neg$wahr herausbekommen. Dieser wird uns aber direkt durch die Wahrheitstabelle der nicht-Zuordnung veraten.

Sortieren wir die Beobachtungen um, so spüren wir, dass Z = ($\neg$ wahr) wegen ($\neg$ wahr) = falsch den Wert *falsch* hat, dass Y = ($Z\wedge$ falsch) wegen (falsch $\wedge$ falsch) = falsch den Wert *falsch* hat und schließlich X = ($Y\vee$ wahr) wegen (falsch $\vee$ wahr) = wahr den Wert *wahr* besitzt.

Während wir alle diese Vorüberlegungen auf einem Schmierblatt gemacht haben, schreiben wir den klaren mathematischen Beweis nun sauber auf. Wie bereits angedeutet erlauben uns dabei *nur Beweisschritte*, unseren Vorrat an geltenden Aussagen zu vergrößern, wobei uns bisher die Ersetzung als einziger Beweisschritt zur Verfügung steht. Ein Blick in die Beweisschrittliste zeigt, dass für die Durchführung eines Ersetzung gewisse Bausteine benötigt werden: (1) die Gleichheitsaussage, auf der die Ersetzung basieren soll, (2) die Aussage in der ersetzt werden soll und (3) die gewünschte Form der Aussage nach der Ersetzung. Für jeden Ersetzungsschritt werden wir deshalb diese Informationen jeweils klar und deutlich angeben. Als Resultat ergibt sich folgender grau hinterlegte Text, der gleichzeitig als Muster für die Lösungen entsprechender Übungsaufgaben dient.

Mit der axiomatisch geltenden Gleichheit

($\neg$ wahr) = falsch

ersetzen wir in der axiomatisch geltenden Aussage

(falsch $\wedge$ falsch) = falsch

den ganz links stehenden Ausdruck (falsch) durch (¬ wahr) und erreichen damit

Es gilt ((¬ wahr) ∧ falsch) = falsch;

Insbesondere können wir mit dieser geltenden Gleichheitsaussage im Axiom

(falsch ∨ wahr) = wahr

den falsch-Ausdruck auf der linken Seite durch ((¬ wahr) ∧ falsch) ersetzen und kommen zu

Es gilt (((¬ wahr)∧ falsch) ∨ wahr) = wahr;

Benutzen wir nun die Abkürzung X, so können wir diese Zeile auch in der angestrebten einfachen Form schreiben

Es gilt $X =$ wahr

Es ist gut möglich, dass Sie es nicht gewohnt sind, solche Texte als Antworten auf mathematische Fragen zu geben. Eine saubere Erklärung verlangt aber die Angabe aller Beweisschritte mit allen Zusatzinformationen und wird deshalb zwangsläufig eine solche Form haben. Es ist deshalb wichtig, dass Sie genauso sorgfältig in Ihren Beweisen vorgehen.

Mit der Zeit werden Ihnen die nötigen Schritte dabei immer schneller klar sein und es wird dann lästig, alle Details aufzuschreiben, genauso wie es für den geübten Leser lästig ist, alle Details lesen zu müssen. Es wird dann die stillschweigende Vereinbarung getroffen, *offensichltiche* Schritte nicht mehr angeben zu müssen. Darin steckt aber eine große Gefahr, da die Einschätzung der Offensichtlichkeit von Autor und Leser unterschiedlich sein kann. Außerdem ist Offensichtlichkeit etwas, das man aufgrund von Erfahrung *fühlt*. Der Nachweis das etwas offensichtlich ist, besteht am Ende doch darin, *alle* Details aufzuschreiben, da dies die einzige präzise und unmissverständliche Argumentationsweise ist.

Während wir in diesem Vorkurs möglichst lange am präzisen Aufschreiben festhalten, erlauben wir uns doch im Laufe des Kurses einige Abkürzungen. Dazu gehört das Unterdrücken der Worte **Es gilt** vor geltenden Aussagen, da mathematische Argumentationen immer nur auf geltenden Aussagen basieren und auch stets geltende Aussagen zum Ziel haben. Diese Regelung entspricht auch der Alltagskommunikation, wo ebenfalls Aussagen immer geltende Aussagen sind (bzw.

sein sollten - Lügen ist gesellschaftlich sanktioniert). So sagt man zum Beispiel *Ich gehe einkaufen* oder *Ich wünsche Dir alles Gute* und nicht *Es stimmt, dass ich einkaufen gehe* bzw. *Es ist wahr, dass ich dir alles Gute wünsche.*

Zusammenfassung
Wir führen die Liste von Axiomen fort.

(A2)	(falsch $\wedge$ falsch) = falsch
(A3)	(falsch $\wedge$ wahr) = falsch
(A4)	(wahr $\wedge$ falsch) = falsch
(A5)	(wahr $\wedge$ wahr) = wahr
(A6)	(falsch $\vee$ falsch) = falsch
(A7)	(falsch $\vee$ wahr) = wahr
(A8)	(wahr $\vee$ falsch) = wahr
(A9)	(wahr $\vee$ wahr) = wahr
(A10)	($\neg$ wahr) = falsch
(A11)	($\neg$ falsch) = wahr

Aufgabe 2.4. Als Zeichen für das Ergebnis der entweder-oder-Verknüpfung zweier Aussagen A, B benutzen wir $A \oplus B$. Geben Sie die zugehörige Wahrheitstabelle an.

Aufgabe 2.5. Um nachzuweisen, dass folgende Verknüpfungen gelten, gehen Sie jeweils von einer geltenden Aussage aus (wie etwa dem elementarsten Axiom **Es gilt** wahr) und geben Sie dann die geltenden Gleichheitsaussagen an, mit denen Sie durch geschickte Ersetzung zur gewünschten Verknüpfung gelangen. Halten Sie sich bei Ihrem Beweis an die grau hinterlegte Vorlage im vorangegangenen Abschnitt.

1. **Es gilt** $\neg$ falsch
2. **Es gilt** $\neg\neg$ wahr
3. **Es gilt** $\neg\neg\neg$ falsch
4. **Es gilt** ($\neg$ wahr) $\vee$ $\neg$(falsch $\wedge$ wahr)
5. **Es gilt** $\neg$(wahr $\wedge$(falsch $\wedge$ wahr))

Aufgabe 2.6. Als Fortführung von Aufgabe 2.3 bilden Sie folgende Aussagen in mathematischer Notation.

1. Monika und Peter sind Personen

2. Monika behauptet, dass sie nicht lügt.
3. Carmen behauptet, dass Alice und Bob lügen.
4. Peter lügt, oder er behauptet, dass er nicht lügt.

2.3 Mathematische Sätze

Mathematische Sätze sind spezielle Regeln in Form von wenn-dann-Beziehungen. Der wenn-Teil spezifiziert dabei eine Situation in der bestimmte Bedingungen gelten (die *Voraussetzungen* des Satzes), während der dann-Teil aus einer Aussage besteht, die unter den gegebenen Voraussetzungen automatisch gilt (die *Folgerung* des Satzes). Insgesamt ist die Regel also eine Aussage der Form *Wenn die Voraussetzung erfüllt ist, dann gilt die Folgerung* und wenn sie als Aussage gilt, spricht man von einem *Satz*.

Genau wie in der Alltagssprache bedeutet das Gelten einer Regel nicht, dass die Voraussetzung erfüllt sein muss. Man denke etwa an die Alltagsregel *Wenn es regnet, dann wird die Straße nass*, die auch dann gilt, wenn es nicht regnet. Eine nicht erfüllte Voraussetzung bedeutet nur, dass die Regel nicht *anwendbar* ist und somit keine Folgerung zulässt. Insbesondere bedeuten fehlende Voraussetzungen nicht, dass das Gegenteil der Folgerung gelten würde (die Straße könnte auch bei klarem Himmel nass sein, zum Beispiel wegen einer Feuerwehrübung).

Beim Erkennen von Regeln muss man beachten, dass die wenn-dann Struktur manchmal erst nach einer sprachlichen Umstellung sichtbar wird. Als Beispiel betrachten wir die Aussage im Kontext von Aufgabe 2.3:

> Jede Person lügt oder lügt nicht.

Zunächst fällt auf, dass sich die Regel nicht auf genau eine Situation bezieht, sondern von mehreren Fällen handelt: Egal welche Person betrachtet wird, immer gilt, dass sie lügt oder nicht lügt. Zur Überführung solcher Regeln in wenn-dann Form ist es nützlich, an eine einzelne Situation zu denken: Wenn eine konkrete Person gegeben ist, dann lügt sie oder nicht Geben wir nun dem im Einzelfall betrachteten Objekt einen Namen (z.B. P), dann können wir die Folgerung der Regel mit unseren mathematischen Symbolen formulieren, $(P \text{ lügt}) \vee \neg(P \text{ lügt})$.

Um auszudrücken, dass diese Folgerung für jedes Objekt P gilt, das die Voraussetzung $(P : \text{Person})$ erfüllt, gibt es sogenannte für-alle-Aussagen, die mit einem umgedrehten A-Symbol $\forall$ (lies *für alle*) eingeleitet werden. Die Kurzform der Regel lautet damit

$\forall P$ **mit** (P : Person) **gilt** (P lügt) $\vee \neg$(P lügt)

Auch die für-alle-Aussage erhält ihre Bedeutung aus den Möglichkeiten, die sie bietet, wenn sie gilt: Gibt es ein Objekt, für das die zwischen **mit** und **gilt** angegebenen Voraussetzungen anstelle des *Platzhalter*-Objekts gelten, dann gilt auch die Folgerung mit den entsprechenden Ersetzungen. Dieser Beweisschritt wird *Anwendung* der für-alle-Aussage genannt.

Wenn also (Alice : Person) gilt erfüllt das Objekt Alice die Voraussetzung anstelle von P. Somit gilt auch die Folgerung mit der gleichen Ersetzung, also im vorliegenden Fall

Es gilt (Alice lügt) $\vee \neg$(Alice lügt);

Neben der für-alle-Aussage gibt es die sogenannte *Implikationsaussage*, die keine eigenen Platzhalter benötigt, um die Voraussetzung in Form einer Aussage V zu beschreiben. Ist F die entsprechende Folgerung, dann notiert man das Ergebnis der Implikationszuordnung mit dem Symbol $V \Rightarrow F$ und sagt V *impliziert* F, oder *aus* V *folgt* F, oder auch *wenn* V*, dann* F.

Genau wie eine für-alle-Aussage kann auch eine geltende Implikationsaussage $V \Rightarrow F$ angewendet werden und zwar dann, wenn die Aussage V gilt. Nach der Anwendung steht die Folgerung F als geltende Aussage zur Verfügung.

Als Oberbegriff für die Implikations- und die für-alle-Aussage benutzen wir im Folgenden die Bezeichnung *Satzaussage*. Zum Nachweis, dass eine Satzaussage gilt, gibt es einen Beweisschritt, der *direkter Beweis* genannt wird.

Beim direkten Beweis einer Implikation $V \Rightarrow F$ versetzen wir uns gedanklich in eine Situation, in der zusätzlich zu den schon geltenden Aussagen auch die Aussage V gilt. Können wir dann mit zulässigen Beweisschritten erreichen, dass F gilt, dann ist der Beweis korrekt abgeschlossen und wir befinden uns gedanklich wieder in der Situation vor dem Beweis, mit dem einzigen Unterschied, dass nun auch $V \Rightarrow F$ gilt.

Entsprechend gehen wir bei für-alle-Aussagen vor, wo beim Eintreten in den Voraussetzungskontext zusätzlich noch die vereinbarten Platzhalter gedanklich als Objekte zur Verfügung stehen.

Als Beispiel für einen direkten Beweis betrachten wir die Satzaussage

$\forall A$ **mit** (A = wahr) **gilt** A;

Die sorgfältige Kombination der benötigten Beweisschritte dient wieder als Muster für Ihre Antworten zu den Übungsaufgaben.

> Wir führen einen direkten Beweis und nehmen dazu an, dass ein zusätzliches Objekt A zur Verfügung steht, für das $A =$ wahr gilt. Ersetzen wir mit dieser geltenden Gleichheit den Ausdruck *wahr* im Axiom **Es gilt** wahr durch A, so finden wir wie gewünscht **Es gilt** A ∎

Als Hinweis auf das Ende eines direkten Beweises benutzen wir das Symbol ∎. Oft wird dazu auch die Abkürzung *qed* verwendet für *quod erat demonstrandum* - was zu beweisen war. Diese Endemarken deuten an, dass der Leser gedanklich in die Situation vor Beweisbeginn zurückspringen soll, wo nun die bewiesene Satzaussage gilt. Alle Aussagen, die nur aufgrund der Annahmen zu Beginn des direkten Beweises gegolten haben und alle Objekte die in diesem Schritt hinzukamen, stehen nach der Endemarke nicht mehr zur Verfügung.

Beachten Sie in dem Beweisbeispiel auch, dass jeder Beweisschritt immer duch einen Hinweis auf seinen Namen (also *direkter Beweis* oder *Ersetzung*) angekündigt werden soll.

Das Gelten der umgekehrten Aussage

$\forall A$ **mit** $(A : \text{Wahrheitswert};\ A)$ **gilt** $A = \text{wahr};$

wird axiomatisch zugesichert. Zusammen mit dem Axiom **Es gilt** wahr wird so der Zusammenhang zwischen geltenden Aussagen und dem Objekt *wahr* präzisiert.

In diesem Beispiel einer für-alle-Aussage sieht man, dass die Voraussetzung aus mehreren Anforderungen an den Platzhalter bestehen kann, die jeweils mit einem Semikolon voneinander abgetrennt werden. Außerdem ist es möglich, mehrere Platzhalter zu verwenden. Ein Beispiel hierfür ist die Regel

$\forall A, B$ **mit** $(A, B : \text{Wahrheitswert};\ A;\ B)$ **gilt** $A \wedge B;$

Bei einem direkten Beweis dieser Aussage wechseln wir gedanklich in eine Situation, wo zwei Aussagen mit Namen A und B zur Verfügung stehen, die jeweils gelten (die Schreibweise A, B : Wahrheitswert ist eine Abkürzung für die zwei Bedingungen A : Wahrheitswert; B : Wahrheitswert). Der vollständige Beweis des Satzes ist eine Übungsaufgabe.

Im Folgenden werden wir die Klammern um die Liste der Voraussetzungen in für-alle-Aussagen unterdrücken, da ja bereits die Wörter **mit** und **gilt** eine Klammerung der Voraussetzungen bilden.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Beweis der Aussage

$\forall B$ **mit** B : Wahrheitswert; B **gilt** $B \wedge B$;

der den Beweisschritt mit Namen *Anwendung* illustriert.

In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass ein Objekt B gegeben ist, für das B : Wahrheitswert und B gilt. Die Anwendung des Axioms

$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert; A **gilt** $A =$ wahr;

auf das Objekt B ist möglich, weil die Voraussetzungen für B anstelle von A erfüllt sind. Wir erhalten damit

Es gilt $B =$ wahr;

Ersetzen wir mit dieser Gleichheit im Axiom

(wahr $\wedge$ wahr) $=$ wahr

auf der linken Seite wahr durch B, so folgt

$(B \wedge B) =$ wahr

Anwendung des Satzes

$\forall A$ **mit** $A =$ wahr **gilt** A;

auf das Objekt $(B \wedge B)$ zeigt schließlich, dass $B \wedge B$ gilt ■

Zusammenfassung
Wir führen unsere Liste von Axiomen fort.

(A12)	$\forall A$ **mit** A **gilt** $A =$ wahr;

Zu den Beweisschritten kommen die Satzanwendung und der direkte Beweis hinzu, wobei im letzteren Fall der Beweisschritt das *Ziel* hat, das Gelten eines bestimmten Aussagetyps nachzuweisen.

direkter Beweis	
Ich möchte zeigen	$A \Rightarrow B$
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage B unter der Annahme, dass A gilt. Diese Annahme ist bis zur Endemarke ■ gültig.
Beweistext	In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass A gilt ... und somit gilt B ■

direkter Beweis	
Ich möchte zeigen	$\forall x$ **mit** B **gilt** F
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage F unter der Annahme, dass die Objekte aus der Liste x zur Verfügung stehen und die Aussagen aus der Liste B gelten. Die Objekte und die Annahmen sind bis zur Endemarke ■ verfügbar.
Beweistext	In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass Objekte x gegeben sind, für die B gilt ... womit schließlich F gilt ■

Die Satzanwendung verlangt ähnlich zur Ersetzung das Gelten eines bestimmten Aussagetyps als Voraussetzung.

Anwendung	
Wobei hilft mir	$A \Rightarrow B$
zum Nachweis von	B, wenn die Aussage A gilt.
Beweistext	Da A gilt zeigt die Anwendung von $A \Rightarrow B$, dass B gilt.

Anwendung	
Wobei hilft mir	$\forall x$ **mit** B **gilt** F
zum Nachweis von	F mit x ersetzt durch u, wenn u anstelle von x die Bedingungen B erfüllt.
Beweistext	Anwendung von $\forall x$ **mit** B **gilt** F auf u zeigt, dass ... gilt.

Die drei Punkte in der beispielhaften Anwendung der für-alle-Aussage stehen dabei als Ersatz für die Folgerung F mit x ausgetauscht durch u.

Als nächstes beginnen wir mit einer Liste wichtiger Aussagen, die im Text oder in den Übungsaufgaben bewiesen werden und die in späteren Beweisen nützlich sind.

(S1)	$\neg$ falsch;

Aufgabe 2.7. Zeigen Sie mit direkten Beweisen, dass die folgenden für-alle-Aussagen gelten. Ergebnisse aus vorangegangenen Übungsaufgaben können dabei verwendet werden. Orientieren Sie sich beim Aufschreiben ihres Beweises an den grau hinterlegten Beispielen im vorangegangenen Abschnitt.

1. $\forall A$ **mit** $A =$ falsch **gilt** $\neg A$;
2. $\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; A; B **gilt** $A \wedge B$;

Aufgabe 2.8. Als Fortführung von Aufgabe 2.3, schreiben Sie folgende für-alle-Aussage als gut lesbare umgangssprachliche Regel auf:

$\forall P, A$ **mit** P : Person; A : Wahrheitswert; P lügt; P behauptet A **gilt** $\neg A$

Formulieren Sie außerdem folgende Regel als eine für-alle-Aussage

Wenn eine Person nicht lügt und etwas behauptet, dann stimmt es.

Aufgabe 2.9. Wir nehmen an, dass die beiden Regeln aus Aufgabe 2.8 gelten und dass zusätzlich folgendes über drei Personen bekannt ist:

Alice behauptet: *Bob lügt.*
Bob behauptet: *Carmen lügt.*
Carmen behauptet: *Alice und Bob lügen.*

Führen Sie direkte Beweise für folgende Implikationsaussagen, indem Sie die Regeln anwenden (Zur Abkürzung kann man auf die erste Regel mit L und auf die zweite Regel mit W Bezug nehmen)

(Bob lügt) $\Rightarrow \neg$(Carmen lügt);
$\neg$(Bob lügt) $\Rightarrow$ (Carmen lügt);

Wie würden sich die Beweise der Aussagen

(Alice lügt) $\Rightarrow \neg$(Bob lügt);
$\neg$(Alice lügt) $\Rightarrow$ (Bob lügt);
(Carmen lügt) $\Rightarrow \neg$((Alice lügt) $\wedge$ (Bob lügt));
$\neg$(Carmen lügt) $\Rightarrow$ ((Alice lügt) $\wedge$ (Bob lügt));

von den bereits geführten Beweisen unterscheiden?

Aufgabe 2.10. Beweisen Sie die folgenden Satzaussagen

$\forall x, y$ **mit** $x = y$ **gilt** $y = x$;
$\forall x, y, z$ **mit** $x = y; y = z$ **gilt** $x = z$;

Die erste Eigenschaft nennt man auch *Symmetrie* der Gleichheit-Zuordnung, während die zweite *Transitivität* genannt wird. Die sogenannte *Reflexivität*

$\forall x$ **mit** x : Objekt **gilt** $x = x$;

müssen Sie nicht beweisen, da sie als Axiom gilt.

2.4 Begriffe

In Aufgabe 2.3 haben wir den Begriff *Person* ohne eine genauere Beschreibung eingeführt und dann in Aufgabe 2.9 angenommen, dass die drei Objekte mit Namen Alice, Bob und Carmen zu seinen Beispielen gehören. Möchte man diese Beispielzugehörigkeit nicht annehmen sondern beweisen, dann muss die Begriffsdefinition präziser durchgeführt werden.

Allgemein gibt man bei der Definition eines Begriffs die Bedingung an, die ein Objekt erfüllen muss, um als Beispiel anerkannt zu werden. Bedingungen notieren wir dabei generell wie Voraussetzungen in für-alle-Aussagen, also mit einem Platzhalter für das zu überprüfende Objekt und einer Liste von Aussagen, die für das Objekt anstelle des Platzhalters gelten müssen. Das Ende der Forderungen wird mit dem Symbol □ markiert.

Für den angestrebten Person-Begriff würde die Beschreibung also etwa so aussehen

$$P \textbf{ mit } (P = \text{Alice}) \vee ((P = \text{Bob}) \vee (P = \text{Carmen})) \ \square$$

Um dem Begriff den Namen *Person* zuzuweisen, können wir das universelle Definitionssymbol := benutzen, wobei links davon der gewünschte Name und rechts der abzukürzende Ausdruck notiert wird. Die Definition hat also die Form

$$\text{Person} := P \textbf{ mit } (P = \text{Alice}) \vee ((P = \text{Bob}) \vee (P = \text{Carmen})) \ \square$$

und würde etwa wie folgt gelesen: *Person ist definiert durch die Bedingung, die von einem Objekt P erfüllt wird, falls P gleich Alice oder P gleich Bob oder P gleich Carmen gilt.*

Ein von der Konstruktion her sehr ähnlicher Begriff ist *Wahrheitswert*, mit dem wir uns schon die ganze Zeit beschäftigen. Hier sind die Beispiele durch die Objekte *wahr* und *falsch* gegeben, also

$$\text{Wahrheitswert} := A \textbf{ mit } (A = \text{wahr}) \vee (A = \text{falsch}) \ \square$$

Im Weiteren werden wir Definitionen solcher sehr grundlegender Begriffe oder Zuordnungen auch in der Zusammenfassung mitführen.

Verknüpft mit Beispielaussagen gibt es zwei Beweisschritte, die wir *Expansion* und *Kompression* nennen. Dabei funktioniert die Expansion, wenn eine Aussage der Form $x : B$ gilt und B durch Angabe einer Bedingung definiert wurde. Nach der Expansion von $x : B$ gelten dann alle Aussagen aus der Definition von B, wobei der Platzhalter durch x ersetzt wurde.

Als Beispiel expandieren wir die Aussage (Alice lügt) : Wahrheitswert. In der angegebenen Form sollten auch Sie die Expansion in Ihren ausführlichen Beweistexten nutzen.

> Die Expansion von (Alice lügt) : Wahrheitswert ergibt
>
> **Es gilt** ((Alice lügt) = wahr)$\vee$((Alice lügt) = falsch);

Die komplementäre Operation der Kompression einer Aussage $x : B$ funktioniert dann, wenn alle Aussagen aus der Definition eines Begriffs B erfüllt sind, jeweils mit dem Platzhalter ersetzt durch das Objekt x. Nach der Kompression gilt die Aussage $x : B$. Auch hier geben wir ein Musterbeispiel an, dass in einem Beweis auftreten könnte, bei dem ein Objekt mit Namen *Sieger* mit den passenden Eigenschaften zur Verfügung steht.

> Da die Aussage
>
> (Sieger = Alice)$\vee$((Sieger = Bob)$\vee$(Sieger = Carmen))
>
> gilt können wir (Sieger : Person) komprimieren.

Zur Illustration von zwei weiteren Beweisschritten wollen wir den Begriff *Petze* einführen. Dabei verstehen wir unter einer Petze eine Person, die von irgendeiner anderen Person behauptet, dass sie lügt.

Um diese Bedingung in der mathematischen Sprache zu beschreiben, müssen wir insbesondere mit dem Wort *irgendein* umgehen können. Dazu gibt es die sogenannte *existiert*-Zuordnung, die jedem Begriff B einen Wahrheitswert zuordnet, den wir mit $\exists B$ bezeichnen. Dabei lesen wir eine Aussage der Form $\exists$Person als *es gibt eine Person*, $\exists$Wahrheitswert als *es gibt einen Wahrheitswert* oder allgemein $\exists B$ als *es gibt ein Beispiel von B*, bzw. *es existiert ein Beispiel von B*. Das herumgedrehte E-ähnliche Symbol $\exists$ erinnert dabei an das Wort *existiert*.

Um nachzuweisen, dass eine Aussage der Form $\exists B$ gilt, muss eine Aussage der Form $x : B$ bewiesen werden, d.h. es muss ein Beispiel x angegeben werden. Umgekehrt erlaubt das Gelten von $x : B$, dass in einem Beweisschritt von einem Objekt x mit der Eigenschaft $x : B$ ausgegangen werden darf. Man sieht an diesen Argumentationsmöglichkeiten, dass $\exists B$ nicht bedeutet, dass B *genau* ein Beispiel besitzt - es können auch mehrere sein.

Die Definition des Begriffs *Petze* können wir mit der *existiert*-Zuordnung so durchführen:

Petze := P **mit** P : Person;
 $\exists Q$ **mit** Q : Person; $Q \neq P$; P behauptet (Q lügt) □ □

Wir sehen an diesem Beispiel, dass der Begriff hinter $\exists$ nicht unbedingt in der Form eines abkürzenden Namens angegeben werden muss, sondern auch eine direkte Beschreibung sein kann. Die erste Marke □ zeigt dabei das Ende der Beschreibung des $\exists$-Begriffs an und die zweite Marke beendet die Beschreibung des Begriffs *Petze*. Lesen wird man die gesamte Definition so: *P ist eine Petze definitionsgemäß genau dann, wenn P eine Person ist und wenn es eine Person Q gibt, die nicht gleich P ist und von der P behauptet, dass sie lügt.*

Das in der Beschreibung benutzte Symbol $\neq$ ist übrigens eine Abkürzung für eine Kombination aus der nicht- und der Gleichheit-Zuordnung. Genauer schreiben wir $A \neq B$ als Abkürzung für $\neg(A = B)$. Solche Abkürzungen für häufig auftretende Verknüpfungen sind in der Mathematik üblich. Entscheidend ist, dass man bei ihrer Verwendung den dazu gehörenden längeren Ausdruck nicht vergisst.

Als Beispiel für den Nachweis einer Existenzaussage zeigen wir (Bob : Petze) unter der Annahme, dass die Aussagen (Alice, Bob : Person); (Alice $\neq$ Bob) und (Bob behauptet (Alice lügt)) gelten.

Durch Kompression ergibt sich

Alice : (Q **mit** Q : Person; $Q \neq$ Bob; Bob behauptet (Q lügt) □)

Somit gilt auch $\exists Q$ **mit** Q : Person; $Q \neq$ Bob; Bob behauptet (Q lügt) □ und wir können (Bob : Petze) komprimieren.

Neben der mit $\exists B$ beschriebenen Situation, dass B *mindestens* ein Beispiel hat, ist oft auch die Situation interessant, dass B *höchstens* ein Beispiel besitzt. Die entsprechende Aussage kürzen wir mit $!B$ ab. Gilt sowohl $\exists B$ als auch $!B$, dann hat B *genau ein* Beispiel. Diese Situation kürzen wir mit $\exists! B$ ab, was einer Zusammenziehung der beiden Symbole entspricht. Ist $\exists! B$ erfüllt, dann kann man *das* Beispiel von B mit $\downarrow B$ ansprechen.

Zusammenfassung
Die Liste der Axiome erweitert sich um die Reflexivität der Gleichheit-Zuordnung.

(A13)	$\forall x$ **mit** x : Objekt **gilt** $x = x$;

Wir beginnen mit einer Liste grundlegender Definitionen.

D1	Wahrheitswert := A **mit** (A = wahr)$\vee$(A = falsch) $\square$

Die hinzukommenden Beweisschritte sortieren wir wieder danach, ob sie das Gelten eines gewissen Aussagetyps zum Ziel oder zur Voraussetzung haben. Wir beginnen mit den voraussetzungsbasierten Schritten.

Expansion	
Wobei hilft mir	$x : B$
zum Nachweis von	den Aussagen aus der Bedingung B mit den Platzhaltern ersetzt durch x.
Beweistext	Expansion von $x : B$ zeigt ...

Beispielwahl	
Wobei hilft mir	$\exists B$
zum Nachweis von	einer Aussage F, die unter der Annahme eines Beispiels zu B bewiesen werden kann.
Beweistext	Sei x ein Beispiel von B ... also gilt F.

Die neu hinzugekommenden auf Zielaussagen ausgerichteten Schritte sind:

Kompression	
Ich möchte zeigen	$x : B$
Vorher zu tun	Alle Aussagen aus der Definition von B die beim Ersetzen des Platzhalters durch das Objekt x entstehen, müssen nachgewiesen werden.
Beweistext	Wir erhalten $x : B$ durch Kompression.

Existenznachweis	
Ich möchte zeigen	$\exists B$
Vorher zu tun	Nachweis einer Aussage der Form $x : B$ mit einem geeigneten x.
Beweistext	Da $x : B$ gilt, erhalten wir $\exists B$.

Wir führen die Liste wichtiger abgeleiteter Aussagen fort.

(S2)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; A; B **gilt** $A \wedge B$;

Aufgabe 2.11. Definieren Sie im Rahmen von Aufgabe 2.3 die Begriffe *Person*, *ehrlich* und *Lügner*.

Definieren Sie außerdem den Begriff *Verweigerer* für eine Person, die gar nichts behauptet.

Aufgabe 2.12. Wir gehen wieder davon aus, dass es einen Begriff *Person* gibt, sowie eine Aussageform, die zwei Personen P, Q den Wahrheitswert (P liebt Q) zuordnet. Welche der umgangssprachlichen Sätze (i)-(iv) passt inhaltlich zu welcher der mathematischen Aussagen aus der Liste (a)-(f).

i) Jede Person liebt eine Person.

ii) Eine Person liebt eine Person.

iii) Eine Person liebt alle Personen.

iv) Alle Personen lieben alle Personen.

a) $\exists P$ **mit** P : Person; $\forall Q$ **mit** Q : Person **gilt** (P liebt Q) $\square$;

b) $\forall P$ **mit** P : Person **gilt** $\forall Q$ **mit** Q : Person **gilt** (P liebt Q);

c) $\exists Q$ **mit** Q : Person; $\exists P$ **mit** P : Person; P liebt Q $\square$ $\square$

d) $\forall Q$ **mit** Q : Person **gilt** $\forall P$ **mit** P : Person **gilt** P liebt Q;

e) $\exists P$ **mit** (P : Person)$\Rightarrow$ $\exists Q$ **mit** Q : Person; (P liebt Q) $\square$

f) $\forall P$ **mit** P : Person **gilt** $\exists Q$ **mit** Q : Person; P liebt Q $\square$

Aufgabe 2.13. Beweisen Sie für den Begriff

wahreAussage := A **mit** A = wahr $\square$

dass folgende Aussagen gelten:

(wahr = wahr) : wahreAussage;
$\forall X$ **mit** X : wahreAussage **gilt** X;

2.5 Fallunterscheidung

Da die grundlegenden logischen Verknüpfungen *und, nicht, oder* aus Wahrheitswerten wieder Wahrheitswerte produzieren, lassen sich ihre Ergebnisse unmittelbar wieder als Argumente verwenden, d.h. wir können auch kompliziertere Aussagen formulieren wie zum Beispiel $A \vee (\neg A)$ (lies A *oder nicht* A).

Diese Aussage vom Shakespeare-Typ (Sein oder Nichtsein) ist dabei gefühlsmäßig immer richtig, da entweder A oder das Gegenteil von A wahr sein muss. Wir spüren also die Gültigkeit der Satzaussage

$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $A \vee (\neg A)$;

Ein mathematisch korrekter Beweis hiervon verlangt einen Schritt, den wir *Fallunterscheidung* nennen und der allgemein so funktioniert: Gilt eine oder-Aussage der Form $U \vee V$ und kann man nun für eine bestimmte Aussage W die beiden Implikationen $U \Rightarrow W$ und $V \Rightarrow W$ nachweisen, so gilt W. Der Grund ist, dass wegen unseren Annahmen zur oder-Verknüpfung mindestens eine der beiden Aussagen U bzw. V gilt, so dass wir mindestens eine der beiden Implikationen $U \Rightarrow W$ bzw. $V \Rightarrow W$ erfolgreich anwenden können.

Da der direkte Beweis der Implikationen mit der Annahme **Es gilt** U bzw. **Es gilt** V beginnt, spricht man auch vom *Fall* U bzw. *Fall* V, in dem W zu zeigen ist. Man unterscheidet also die beiden durch die oder-Aussage spezifizierten Fälle.

Als Muster für einen Beweis, der einen Fallunterscheidungsschritt enthält, soll die Gültigkeit der Shakespeare-Aussage gezeigt werden.

In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass ein Objekt A zur Verfügung steht, für das (A : Wahrheitswert) gilt. Durch Expansion erhalten wir die geltende oder-Aussage $((A = \text{wahr}) \vee (A = \text{falsch}))$, auf der wir als nächstes eine Fallunterscheidung durchführen. Im Fall $(A = \text{wahr})$ ersetzen wir die axiomatisch geltende Aussage $(\neg\ \text{wahr}) = \text{falsch}$ durch $(\neg A) = \text{falsch}$. Damit können wir durch zwei weitere Ersetzungsschritte $(\text{wahr} \vee \text{falsch}) = \text{wahr}$ durch $(A \vee (\neg A)) = \text{wahr}$ ersetzen. Eine Ersetzung im Axiom **Es gilt** wahr zeigt nun, dass $A \vee (\neg A)$ gilt.

Im Fall $(A = \text{falsch})$ geht man ähnlich vor: Durch Ersetzung folgt aus $(\neg\ \text{falsch}) = \text{wahr}$, dass $(\neg A) = \text{wahr}$ gilt. Mit zwei weiteren Ersetzungsschritten folgern wir aus $(\text{falsch} \vee \text{wahr}) = \text{wahr}$ nun $(A \vee (\neg A)) = \text{wahr}$ und in einem letzten Ersetzungsschritt aus **Es gilt** wahr, dass $(A \vee (\neg A))$ gilt. In beiden Fällen folgt also $(A \vee (\neg A))$ und damit gilt die gewünschte Aussage ∎

Aussageverknüpfungen wie $A \vee (\neg A)$ vom Shakespeare-Typ, die unabhängig von den Belegung der Platzhalter gelten, nennt man auch *Tautologien*. Sie sind Beispiele für logische Gesetzmäßigkeiten, die wir normalerweise intuitiv in Argumentationen benutzen.

Um Tautologien systematisch zu erkennen, kann man wie im vorangegangenen Beispiel einfach alle möglichen Fälle von Wahrheitswertbelegungen der auftretenden

Platzhalter betrachten. Als weiteres Beispiel schauen wir uns die sogenannte de Morgansche Regel an:

$$\forall A, B \ \mathbf{mit} \ A, B : \text{Wahrheitswert } \mathbf{gilt} \ (\neg(A \vee B)) = ((\neg A) \wedge (\neg B))$$

Eine Skizze des direkten Beweises dieses Satzes sieht so aus: Zunächst begeben wir uns in den Voraussetzungskontext, d.h. uns stehen nun zwei Objekte mit Namen A, B zur Verfügung, von denen wir wissen, dass es sich um Wahrheitswerte handelt (die Schreibweise A, B : Wahrheitswert ist eine Abkürzung von A : Wahrheitswert; B : Wahrheitswert). In einem Fallunterscheidungsschritt betrachten wir zunächst den Fall $A =$ falsch. Innerhalb dieses Falls machen wir wieder einen Fallunterscheidungsschritt bezüglich des Wahrheitswerts von B, d.h. wir nehmen an $B =$ falsch.

Nun können wir durch Ersetzungen gleichbedeutender Ausdrücke in den Tatsachen über die *und-, nicht-, oder*-Verknüpfungen zeigen, dass tatsächlich $(\neg(A \vee B)) = ((\neg A) \wedge (\neg B))$ gilt.

Der zweite Fall $B =$ wahr wird entsprechend behandelt und liefert das gleiche Ergebnis, so dass wir insgesamt den Fall $A =$ falsch erfolgreich abschließen können, um dann zum Fall $A =$ wahr überzugehen. Auch hier benutzen wir wieder die Fallunterscheidung bezüglich der möglichen Wahrheitswerte von B, was auf die Untersuchung der beiden Kombinationen $A =$ wahr, $B =$ falsch und $A =$ wahr, $B =$ wahr hinausläuft. In allen diesen Fällen folgt stets, dass $(\neg(A \vee B)) = ((\neg A) \wedge (\neg B))$ gilt. Insgesamt sehen wir also nach drei Fallunterscheidungen (einer äußeren für A und zwei inneren für B), dass die gewünschte Aussage gilt, was die Skizze des direkten Beweises abschließt.

Zur übersichtlicheren Darstellung der mehrfachen Fallunterscheidung kann man wieder Wahrheitstabellen verwenden. Zunächst notieren wir unter den Platzhaltern im Ausdruck $(\neg(A \vee B)) = ((\neg A) \wedge (\neg B))$ die Kombinationen der möglichen Wahrheitswerte

(	$\neg$	(	A	$\vee$	B	))	=	((	$\neg$	A	)	$\wedge$	(	$\neg$	B	))
			f		f					f					f	
			f		w					f					w	
			w		f					w					f	
			w		w					w					w	

Die besprochenen drei Fallunterscheidungen sind daran zu erkennen, dass zu den beiden Fälle von $A =$ falsch und $A =$ wahr jeweils die zwei Fälle $B =$ falsch und $B =$ wahr betrachtet werden.

Da nun in jedem Fall (in jeder Zeile) die Wahrheitswerte von A, B bekannt sind, lassen sich aus den Grundaussagen zu den logischen Verknüpfungen mit Hilfe von Gleichheitsersetzungen auch die Werte der Verknüpfungsergebnisse ermitteln und Schritt für Schritt unter den entsprechenden Verknüpfungszeichen eintragen.

Für die oder-Verknüpfung links vom Gleichheitszeichen und die beiden Negationen rechts davon ergibt sich zunächst (Ergebnisse jeweils im Fettdruck)

(	$\neg$	(	A	$\vee$	B	))	=	((	$\neg$	A	)	$\wedge$	(	$\neg$	B	))
			f	**f**	f				**w**	f				**w**	f	
			f	**w**	w				**w**	f				**f**	w	
			w	**w**	f				**f**	w				**w**	f	
			w	**w**	w				**f**	w				**f**	w	

Im nächsten Schritt wirkt links die Negation auf die Ergebnisse im Fettdruck während rechts die und-Verknüpfung angewendet wird

(	$\neg$	(	A	$\vee$	B	))	=	((	$\neg$	A	)	$\wedge$	(	$\neg$	B	))
	w		f	f	f				w	f		**w**		w	f	
	f		f	w	w				w	f		**f**		f	w	
	f		w	w	f				f	w		**f**		w	f	
	f		w	w	w				f	w		**f**		f	w	

Wendet man schließlich die Gleichheitsverknüpfung auf die fettgedruckten Zwischenergebnisse an, so erkennt man, dass in allen vier Kombinationen das Gesamtergebnis jeweils **w** ist. Es ergibt sich damit die finale Tabelle

(	$\neg$	(	A	$\vee$	B	))	=	((	$\neg$	A	)	$\wedge$	(	$\neg$	B	))
	w		f	f	f		**w**		w	f		w		w	f	
	f		f	w	w		**w**		w	f		f		f	w	
	f		w	w	f		**w**		f	w		f		w	f	
	f		w	w	w		**w**		f	w		f		f	w	

Sie zeigt an, dass die untersuchte Verknüpfung eine Tautologie darstellt.

Traditionell benutzt man in der Logik die Infix-Schreibweise $A \Leftrightarrow B$ anstelle von $A = B$. Den Grund dafür werden Sie in Aufgabe 2.25 kennenlernen, wo gezeigt wird, dass zwei Aussagen genau dann gleich sind, wenn sowohl $A \Rightarrow B$, als auch $B \Rightarrow A$ gilt. Das Äquivalenzsymbol $\Leftrightarrow$ erinnert an diese beiden Implikationen. Im Folgenden werden wir $A \Leftrightarrow B$ synonym zu $A = B$ benutzen, wenn A, B Wahrheitswerte sind. Insbesondere ist ein Ersetzungsschritt auch möglich, wenn eine Aussage der Form $A \Leftrightarrow B$ gilt

Dass eine doppelte Negation immer äquivalent (gleichbedeutend) zur Ausgangsaussage ist, zeigt man wieder mit einem direkten Beweis der für-alle-Aussage

$\forall A$ **mit** $A :$ Wahrheitswert **gilt** $(\neg\neg A) \Leftrightarrow A$;

Die systematische Fallunterscheidung kann man dabei wieder mit Hilfe einer Wahrheitstabelle führen

(	¬	¬	A	)	⇔	A
	f	w	f		**w**	f
	w	f	w		**w**	w

Zusammenfassung
Zu den Beweisschritten kommt die Fallunterscheidung hinzu.

Fallunterscheidung	
Wobei hilft mir	$A \vee B$
zum Nachweis von	einer Aussage F, die sowohl unter der Annahme A bewiesen werden kann, als auch unter der Annahme B.
Beweistext	In einer Fallunterscheidung basierend auf $A \vee B$ betrachten wir Fall A ... dann gilt F. Im Fall B folgt ... also wieder F. Insgesamt gilt damit F.

Aufgabe 2.14. Beweisen Sie mit einer Wahrheitsatabelle die zweite de Morgansche Regel

$\forall A, B$ **mit** $A, B :$ Wahrheitswert **gilt** $(\neg(A \wedge B)) = ((\neg A) \vee (\neg B))$

Zeigen Sie genauso, dass folgende Tautologien gelten

1. $\forall A$ **mit** $A :$ Wahrheitswert **gilt** $(A \vee A) \Leftrightarrow A$;
2. $\forall A$ **mit** $A :$ Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$;
3. $\forall A, B$ **mit** $A, B :$ Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$;
4. $\forall A, B$ **mit** $A, B :$ Wahrheitswert **gilt** $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$;
5. $\forall A, B, C$ **mit** $A, B, C :$ Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;
6. $\forall A, B, C$ **mit** $A, B, C :$ Wahrheitswert **gilt** $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$;

Aufgabe 2.15. Beweisen Sie mit Hilfe der de Morganschen Tautologien die zugehörigen für-alle-Aussagen

$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; $\neg(A \vee B)$ **gilt** $(\neg A) \wedge (\neg B)$;
$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; $(\neg A) \vee (\neg B)$ **gilt** $\neg(A \wedge B)$;

Mit dem gleichen Prozess lassen sich mit jeder Tautologie aus Aufgabe 2.14 zwei für-alle-Aussagen ableiten. Formulieren Sie für eine der Tautologien die beiden zugehörigen Sätze.

Aufgabe 2.16. Beweisen Sie die folgenden beiden Sätze

$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; A **gilt** $A \vee B$;
$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; B **gilt** $A \vee B$;

Beweisen Sie damit die Tautologien

$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $A \Rightarrow (A \vee B)$;
$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $B \Rightarrow (A \vee B)$;

Aufgabe 2.17. Zeigen Sie ausgehend von der Definition des Begriffs *Person* in Abschnitt 2.4, dass folgende Aussagen gelten:

Alice, Bob, Carmen : Person;

Aufgabe 2.18. Zeigen Sie, dass folgender Satz gilt.

$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $(\neg A)$: Wahrheitswert

Aufgabe 2.19. Zeigen Sie mit der Methode aus Aufgabe 2.14, dass die Klammerungsreihenfolge bei dreifachen oder- bzw. und-Aussagen keine Rolle spielt (sogenannte Assoziativitätseigenschaft), d.h.

$\forall A, B, C$ **mit** A, B, C : Wahrheitswert **gilt**
$((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$
$\forall A, B, C$ **mit** A, B, C : Wahrheitswert **gilt**
$((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$

Wenn aber die Klammerung keine Rolle spielt, dann enthält sie auch keine Information und wird normalerweise unterdrückt, d.h. wir schreiben einfach $A \vee B \vee C$. Wieviele Klammermöglichkeiten gibt es bei einer vierfachen oder-Verknüpfung? Sind die resultierenden Aussagen auch alle äquivalent zueinander?

Aufgabe 2.20. Zeigen Sie mit der entsprechenden Tautologie, dass folgender Satz zur doppelten Verneinung gilt

$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert; $\neg\neg A$ **gilt** A;

2.6 Widersprüche

Unser intuitives Verständnis von *Wahrheit* orientiert sich an der *Realität*: Wahre Aussagen stehen im Einklang mit der Realität, wobei diese zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort durch genau eine Gesamtsituation beschrieben ist. Aussagen zum gleichzeitigen Vorliegen einer davon unterschiedlichen Situation sind somit nicht wahr, wobei wir *falsch* als Synonym zu *nicht wahr* betrachten.

Zum Beispiel passt die Aussage des Angeklagten, nie am Tatort gewesen zu sein, nicht zum Auffinden seiner Fingerabdrücke, der DNA-Spuren und den Bildern der Überwachungskamera, die nach den uns bekannten Naturgesetzen nur durch die Anwesenheit der zugehörigen Person entstehen können. Vor Gericht gehen wir also davon aus, dass die Korrektheit der Implikationsaussage *Wenn Fingerabdrücke, DNA-Spuren und Überwachungsbilder einer Person an einem Ort vorliegen, dann war die Person an diesem Ort* durch die Realität sichergestellt wird. Sind die Voraussetzungen für eine konkrete Person und einen konkreten Ort erfüllt, dann folgern wir, dass die Person in der Realität an diesem Ort war. Die Aussage des Angeklagten ist daher nicht im Einklang mit der Realität und somit falsch. Einer Verurteilung steht nach dieser Logik nichts mehr im Wege.

Schauen wir uns im Vergleich dazu an, wie das Zusammenspiel von *wahr* und *falsch* in der mathematischen Sprache geregelt ist.

Unsere Vermutung ist natürlich, dass auch hier *wahr* und *falsch* unterschiedliche Objekte sind. Hypothetisch können wir trotzdem die gegenteilige Situation untersuchen und nachforschen, welche Konsequenzen daraus erwachsen, wenn $\text{wahr} = \text{falsch}$ gilt.

Man sieht schnell, dass Mathematik in dieser Situation extrem langweilig wird: Wenn $\text{wahr} = \text{falsch}$ gilt dann folgt aus dem Axiom

Es gilt wahr

durch Ersetzung auch

Es gilt falsch

Da Aussagen generell Ausdrücke sind, die gleich wahr oder gleich falsch sind, lässt sich durch Ersetzung zeigen, dass *jede beliebige* Aussage gilt. Wenn aber jede Aussage gilt, braucht man nicht mehr zu argumentieren!

Die genaue Ausführung der gerade angedeuteten Beweisskizze des Satzes

$(\text{wahr} = \text{falsch}) \Rightarrow \forall B$ **mit** $B : \text{Wahrheitswert}$ **gilt** B;

stellen wir wieder als Beweismuster vor:

Zum Beweis der Implikation wählen wir einen direkten Beweis. Wir nehmen also an, dass (wahr = falsch) gilt. Um nun zu zeigen, dass die angegebene für-alle-Aussage gilt, führen wir einen direkten Beweis innerhalb des direkten Beweises. Dazu nehmen wir weiter an, dass ein Objekt B vorliegt, für das (B : Wahrheitswert) gilt. Durch Expansion dieser Aussage erhalten wir (B = wahr) $\vee$ (B = falsch), worauf wir eine Fallunterscheidung basieren: Im Fall B = wahr wenden wir den Satz

$\forall A$ **mit** A = wahr **gilt** A;

auf B an. Im Fall B = falsch können wir falsch wegen (wahr = falsch) durch wahr ersetzen, was ebenfalls auf B = wahr und damit auf das Gelten von B führt. In beiden Fällen gilt also B. Damit schließt zunächst der Beweis des für-alle-Aussage ∎ Im direkten Beweis der Implikation gilt damit die gewünschte Folgerung ∎

Allgemein nennen wir die groteske Situation, in der wahr = falsch gilt *widersprüchlich*. Ein Merksatz zur bewiesenen Implikation ist damit: *In einer widersprüchlichen Situation gilt jede Aussage.*

Ein weiterer Merksatz ist: *Wenn aus einer Aussage eine widersprüchliche Situation folgt, so muss sie falsch sein.* Die präzise mathematische Form des zugehörigen Satzes ist

$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert; $A \Rightarrow$ (wahr = falsch) **gilt** $\neg A$;

Auch hier führen wir den Beweis mustergültig:

In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass ein Objekt A vorliegt mit der Eigenschaft A : Wahrheitswert. Weiter gelte die Regel $A \Rightarrow$ (wahr = falsch). Expansion von A : Wahrheitswert führt auf eine oder-Aussage, die wir als Basis einer Fallunterscheidung nutzen. Im Fall A = wahr zeigt eine Ersetzung im Axiom **Es gilt** wahr, dass A gilt. Eine Anwendung der Implikation ergibt dann (wahr = falsch) und eine Anwendung der gerade bewiesenen Implikation liefert $\forall B$ **mit** B : Wahrheitswert **gilt** B. Anwendung auf den Wahrheitswert $\neg A$ zeigt, dass $\neg A$ gilt.

Im Fall A = falsch ergibt sich durch Ersetzung in ($\neg$ falsch) = wahr die Tatsache $\neg A$ = wahr, und eine weitere Ersetzung in **Es gilt** wahr zeigt, dass $\neg A$ gilt.

Es gilt also in jedem Fall $\neg A$, was die Fallunterscheidung und den direkten Beweis erfolgreich abschließt ■

Die zweite Merkregel ist die Grundlage für einen Beweisschritt, der *Widerspruchsbeweis* genannt wird. Man nimmt dazu an, dass eine Aussage A gilt und versucht dann die widersprüchliche Situation wahr = falsch mit zulässigen Beweisschritten abzuleiten. Das Erreichen dieses Ziels wird durch ein Blitzsymbol $\lightning$ kenntlich gemacht. Die Merkregel impliziert dann, dass das Gegenteil also $\neg A$ gilt. Nach dem Blitzsymbol kehrt man als Leser daher gedanklich in die Situation vor dem Widerspruchsbeweis zurück, wobei nun die zusätzliche Aussage $\neg A$ gilt.

Als Beispiel eines Widerspruchsbeweises zeigen wir

Es gilt wahr $\neq$ falsch;

In einem Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass wahr = falsch gilt. Damit befinden wir uns in einer widersprüchlichen Situation $\lightning$. Es gilt also das Gegenteil $\neg$(wahr = falsch), wofür wir die Abkürzung wahr $\neq$ falsch eingeführt hatten.

Eine Aussage, die sowohl gilt als auch nicht gilt, nennen wir einen Widerspruch

Widerspruch := A **mit** A : Wahrheitswert; $A; \neg A$ □

In den Übungsaufgaben wird gezeigt, dass die Existenz eines Widerspruchs gleichbedeutend mit (wahr = falsch) ist. Aus diesem Grund werden wir in den späteren Kapiteln das $\lightning$ Symbol bereits dann setzen, wenn $\exists$Widerspruch nachgewiesen wurde.

Zum Nachweis, dass eine Satzaussage *nicht* gilt, bedient man sich häufig einer speziellen Form des Widerspruchsbeweises, indem man ein sogenanntes *Gegenbeispiel* konstruiert. Unter einem Gegenbeispiel zu $\forall x$ **mit** B **gilt** F verstehen wir dabei ein Objekt x, das die Voraussetzung B und das Gegenteil der Folgerung, also $\neg F$, erfüllt.

Haben wir ein solches Objekt gefunden, dann führt die Annahme, dass die Satzaussage gilt auf einen Widerspruch: da x die Voraussetzungen erfüllt, können wir den Satz anwenden, so dass die Folgerung F gilt. Gleichzeitig war x aber so konstruiert, dass $\neg F$ gilt, womit F : Widerspruch komprimiert werden kann. Es existiert also ein Widerspruch und das Gegenteil der Satzaussage gilt.

Damit man dieses Widerspruchsargument nicht jedes mal wiederholen muss, gibt es einen speziellen Beweisschritt zum Nachweis des Gegenteils einer Satzaussage: es genügt die Angabe eines Gegenbeispiels.

Als einfaches Beispiel beweisen wir

$$\neg\forall A \textbf{ mit } A : \text{Wahrheitswert } \textbf{gilt } A = \text{wahr}$$

Axiom (A13) angewendet auf *falsch* zeigt (falsch = falsch). Mit Satz (S12) angewendet auf (falsch = wahr, falsch = falsch) folgt die oder-Aussage, die uns erlaubt (falsch : Wahrheitswert) zu komprimieren. Nehmen wir nun in einem Widerspruchsbeweis an, dass (falsch = wahr) gilt. Durch Ersetzung in sich selbst ergibt sich dann auch (wahr = falsch) $\lightning$. Damit gilt $\neg$(falsch = wahr) und *falsch* ist damit ein Gegenbeispiel von $\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $A =$ wahr.

Ist man im umgekehrten Fall in einer Situation, wo die Negation

$$\neg\forall x \textbf{ mit } B \textbf{ gilt } F$$

einer für-alle-Aussage gilt, wo also nicht für alle x, die B erfüllen auch F gilt, so sagt uns unser Gefühl, dass für mindestens ein x, das B erfüllt, das Gegenteil von F der Fall ist.

Dieses Gefühl wird in einem Beweisschritt aufgegriffen: Gilt das Gegenteil einer für-alle-Aussage, dann kann für den Nachweis einer weiteren Aussage G auf ein Gegenbeispiel des Satzes zurückgegriffen werden. Einzige Bedingung ist, dass die Aussage G ohne Referenz auf das Gegenbeispiel formulierbar ist.

Zusammenfassung
Wir führen die Liste grundlegender Definitionen fort.

D2	Widerspruch := A **mit** A : Wahrheitswert; $A; \neg A$ $\square$

Die Liste der Beweisschritte wird ebenfalls ergänzt.

Widerspruchsbeweis	
Ich möchte zeigen	$\neg A$
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage (wahr = falsch) unter der Annahme, dass A gilt. Diese Annahme ist bis zur Endemarke $\lightning$ gültig.
Beweistext	In einem Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass A gilt $\ldots \lightning$ Also gilt $\neg A$.

Gegenbeispiel	
Ich möchte zeigen	$\neg\forall x$ **mit** B **gilt** F
Vorher zu tun	Finden eines Objekts x, so dass B erfüllt ist und $\neg F$ gilt.
Beweistext	x ist ein Gegenbeispiel zu $\forall x$ **mit** B **gilt** F.

Gegenbeispielwahl	
Wobei hilft mir	$\neg\forall x$ **mit** B **gilt** F
zum Nachweis von	einer Aussage G, die unter der Annahme eines Objekts bewiesen werden kann, das B und $\neg F$ erfüllt.
Beweistext	Sei u ein Gegenbeispiel zu $\forall x$ **mit** B **gilt** F ... also gilt G $\blacksquare$

Die Liste der abgeleiteten Aussagen wird durch den Nachweis vieler Tautologien enorm erweitert. Dabei lässt sich gemäß Aufgabe 2.15 jede Tautologie in zwei zugehörige Satzaussagen verwandeln. Um eine Satzflut zu vermeiden, notieren wir nur die Tautologien und sprechen die zwei zugehörigen Sätze jeweils mit der gleichen Nummer an.

(S3)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
(S4)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
(S5)	$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $(A \vee A) \Leftrightarrow A$;
(S6)	$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$;
(S7)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$;
(S8)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$;
(S9)	$\forall A, B, C$ **mit** A, B, C : Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;
(S10)	$\forall A, B, C$ **mit** A, B, C : Wahrheitswert **gilt** $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$;
(S11)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; A **gilt** $A \vee B$;
(S12)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; B **gilt** $A \vee B$;
(S13)	$\forall A, B, C$ **mit** A, B, C : Wahrheitswert **gilt** $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$
(S14)	$\forall A, B, C$ **mit** A, B, C : Wahrheitswert **gilt** $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$
(S15)	$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $(\neg\neg A) \Leftrightarrow A$;
(S16)	(wahr = falsch) $\Rightarrow \forall B$ **mit** B : Wahrheitswert **gilt** B;

Aufgabe 2.21. Beweisen Sie

- $\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert; $A; \neg A$ **gilt** wahr = falsch;
- $\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert; $A = \neg A$ **gilt** wahr = falsch;
- ($\exists$Widerspruch)$\Leftrightarrow$(wahr = falsch);

- $\neg\exists$Widerspruch;

Aufgabe 2.22. Beweisen Sie folgenden Satz

$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert; $\neg A$ **gilt** $A =$ falsch;

Aufgabe 2.23. Ziel dieser Aufgabe ist der Nachweis der Wahrheitstabelle zur Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Dazu beweisen Sie zunächst folgende Sätze

1. $\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; $\neg A; \neg B$ **gilt** $A \Rightarrow B$;
2. $\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; $\neg A; B$ **gilt** $A \Rightarrow B$;
3. $\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; $A; \neg B$ **gilt** $\neg(A \Rightarrow B)$;
4. $\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; $A; B$ **gilt** $A \Rightarrow B$;

und wenden Sie diese anschließend geeignet an.

Aufgabe 2.24. Da nun die Wahrheitstabelle der Implikation zur Verfügung steht, können Sie wie in Aufgabe 2.14 folgende Tautologien zeigen

1. $\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge B) \Rightarrow A$;
2. $\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge B) \Rightarrow B$;
3. $\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $A \Rightarrow (A \vee B)$;
4. $\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $B \Rightarrow (A \vee B)$;

Beweisen Sie mit dem dritten Satz die verwandte Regel

$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; A **gilt** $A \vee B$;

Wozu wird die Voraussetzung B : Wahrheitswert benötigt?

Aufgabe 2.25. Zeigen Sie die Tautologie

$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt**
$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$

mit einer Wahrheitstabelle. Verwenden Sie das Ergebnis, um folgenden Satz zu beweisen:

$$\forall A, B \textbf{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert; } A \Rightarrow B; B \Rightarrow A \textbf{ gilt } A \Leftrightarrow B$$

Aufgabe 2.26. Zeigen Sie folgende Hilfsätze

$$\forall A, B \textbf{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert; } A \vee B; \neg A \textbf{ gilt } B;$$
$$\forall A, B \textbf{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert; } A \vee B; \neg B \textbf{ gilt } A;$$

Aufgabe 2.27. Zeigen Sie die folgende Tautologie

$$\forall A, B \textbf{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert } \textbf{gilt } (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

In einem *Kontrapositionsbeweis* zeigt man die Implikation $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ und schließt dann, dass $A \Rightarrow B$ gilt. Formulieren Sie diese Argumentation als einen Satz und beweisen Sie ihn.

2.7 Lesen und Schreiben

Nachdem nun die wesentlichen Beweisschritte vorgestellt wurden, sollen sie noch einmal unter verschiedenen Gesichtspunkten zusammengefasst werden. Dabei unterscheiden wir grundsätzlich, ob ein Beweis *geschrieben* oder *gelesen* werden soll.

Beim Schreiben wiederum unterteilt sich die Vielfalt der Schritte in solche, die uns helfen, das Gelten von Aussagen eines bestimmten Typs nachzuweisen und solche, die nur deshalb möglich sind, weil eine Aussage speziellen Typs bereits gilt.

Beim Lesen von mathematischen Texten beschränken wir uns auf das *kontrollierende* Lesen. Diesen fast mechanischen Vorgang zu beherrschen ist sehr wichtig für die Selbstkontrolle beim Verfassen von Beweisen.

Beim Schreiben: Ich möchte zeigen ...

Ausgangspunkt für einen Beweis ist immer die Frage, ob eine bestimmte Aussage gilt. Abhängig vom Aussagentyp stehen zum Nachweis spezielle Beweisschritte zur Verfügung, die allerdings als Vorbedingung das Gelten anderer Aussagen verlangen. Das ursprüngliche Beweisziel verlagert sich dadurch von der eigentlichen Aussage auf die Hilfsaussagen. Sind die Hilfaussagen einmal gezeigt, dann kann der eigentliche Beweisschritt greifen und den Beweis abschließen.

Für die Hilsaussagen als neue Ziele wählt man nun ebenfalls Beweisschritte, die wieder andere Aussagen als Vorbedingung haben. In dieser Weise entwickelt sich der Beweis *rückwärts* vom Ziel her: Sind erst mal die Vorbedingungen erfüllt, dann weiß man, mit welchen Schritten der Beweis beendet werden kann.

Im einfachsten Fall sind die Vorbedingungen Aussagen, die nach Voraussetzung gelten oder bereits bewiesen wurden. Es kann aber auch notwendig sein, sie *vorwärts* aus geltenden Aussagen heraus abzuleiten. Die dafür nutzbaren Beweisschritte werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

Die Entwicklung des vollständigen Beweis setzt sich damit im Allgemeinen aus einer Vorwärts- und einer Rückwärtsbewegung zusammen. Sobald die gesamte Beweisführung klar ist, schreibt man alle Schritte der Reihe nach auf, beginnend mit den Voraussetzungen und dem gewünschten Ziel als Abschluss.

In der folgenden Tabelle fassen wir die Schritte zusammen, bei denen die Konsequenz das Gelten eines spezifischen Aussagetyps ist und die deshalb bei der Beweisplanung die Rückwärtsbewegung erzeugen.

Kompression	
Ich möchte zeigen	$x : B$
Vorher zu tun	Alle Aussagen aus der Definition von B die beim Ersetzen des Platzhalters durch das Objekt x entstehen, müssen nachgewiesen werden.
Beweistext	Wir erhalten $x : B$ durch Kompression.

Existenznachweis	
Ich möchte zeigen	$\exists B$
Vorher zu tun	Nachweis einer Aussage der Form $x : B$ mit einem geeigneten x.
Beweistext	Da $x : B$ gilt, erhalten wir $\exists B$.

direkter Beweis	
Ich möchte zeigen	$A \Rightarrow B$
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage B unter der Annahme, dass A gilt. Diese Annahme ist bis zur Endemarke ■ gültig.
Beweistext	In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass A gilt ... und somit gilt B ■

direkter Beweis	
Ich möchte zeigen	$\forall x$ **mit** B **gilt** F
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage F unter der Annahme, dass die Objekte aus der Liste x zur Verfügung stehen und die Aussagen aus der Liste B gelten. Die Objekte und die Annahmen sind bis zur Endemarke $\blacksquare$ verfügbar.
Beweistext	In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass Objekte x gegeben sind, für die B gilt ... womit schließlich F gilt $\blacksquare$

Widerspruchsbeweis	
Ich möchte zeigen	$\neg A$
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage (wahr = falsch) unter der Annahme, dass A gilt. Diese Annahme ist bis zur Endemarke $\lightning$ gültig.
Beweistext	In einem Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass A gilt ... $\lightning$ Also gilt $\neg A$.

Gegenbeispiel	
Ich möchte zeigen	$\neg\forall x$ **mit** B **gilt** F
Vorher zu tun	Finden eines Objekts x, so dass B erfüllt ist und $\neg F$ gilt.
Beweistext	x ist ein Gegenbeispiel zu $\forall x$ **mit** B **gilt** F.

Beim Schreiben: Wobei hilft mir ...

Die nun folgenden Schritte sind in ihrem Ziel unspezifisch, d.h. es lassen sich Aussagen aller Typen aus den Schritten ableiten. Spezifisch sind dagegen die Voraussetzungen für ihre Nutzung.

Bei der Beweisplanung eignen sie sich daher zum Brückenschlagen zwischen Aussagen, die bereits gelten und den Hilfaussagen die durch die Rückwärtsbewegung entstehen.

Ersetzung	
Wobei hilft mir	$A = B$
zum Nachweis von	V, wenn es eine geltende Aussage U gibt, aus der durch selektives Austauschen von A und B die Aussage V entsteht.
Beweistext	Wegen $A = B$ und U gilt auch V.

Anwendung	
Wobei hilft mir	$A \Rightarrow B$
zum Nachweis von	B, wenn die Aussage A gilt.
Beweistext	Da A gilt zeigt die Anwendung von $A \Rightarrow B$, dass B gilt.

Anwendung	
Wobei hilft mir	$\forall x$ **mit** B **gilt** F
zum Nachweis von	F mit x ersetzt durch u, wenn u anstelle von x die Bedingungen B erfüllt.
Beweistext	Anwendung von $\forall x$ **mit** B **gilt** F auf u zeigt, dass ... gilt.

Expansion	
Wobei hilft mir	$x : B$
zum Nachweis von	den Aussagen aus der Bedingung B mit den Platzhaltern ersetzt durch x.
Beweistext	Expansion von $x : B$ zeigt ...

Beispielwahl	
Wobei hilft mir	$\exists B$
zum Nachweis von	einer Aussage F, die unter der Annahme eines Beispiels zu B bewiesen werden kann.
Beweistext	Sei x ein Beispiel von B ... also gilt F.

Fallunterscheidung	
Wobei hilft mir	$A \vee B$
zum Nachweis von	einer Aussage F, die sowohl unter der Annahme A bewiesen werden kann, als auch unter der Annahme B.
Beweistext	In einer Fallunterscheidung basierend auf $A \vee B$ betrachten wir Fall A ... dann gilt F. Im Fall B folgt ... also wieder F. Insgesamt gilt damit F.

Gegenbeispielwahl	
Wobei hilft mir	$\neg\forall x$ **mit** B **gilt** F
zum Nachweis von	einer Aussage G, die unter der Annahme eines Objekts bewiesen werden kann, das B und $\neg F$ erfüllt.
Beweistext	Sei u ein Gegenbeispiel zu $\forall x$ **mit** B **gilt** F ... also gilt G ∎

Grundlegende Axiome und Sätze

Neben der Kenntnis der grundlegenden Schritte ist es ebenso wichtig, die Struktur der Folgerungen bereits bewiesener Sätze in Erinnerung zu halten. Passt eine Folgerung zu einer Aussage, die gezeigt werden muss, dann ist die entsprechende Satzanwendung eine Option. Zur Erinnerung werden deshalb auch die bereits bewiesenen Sätze und Axiome noch einmal zusammengefasst.

(A1)	wahr
(A2)	(falsch $\wedge$ falsch) $=$ falsch
(A3)	(falsch $\wedge$ wahr) $=$ falsch
(A4)	(wahr $\wedge$ falsch) $=$ falsch
(A5)	(wahr $\wedge$ wahr) $=$ wahr
(A6)	(falsch $\vee$ falsch) $=$ falsch
(A7)	(falsch $\vee$ wahr) $=$ wahr
(A8)	(wahr $\vee$ falsch) $=$ wahr
(A9)	(wahr $\vee$ wahr) $=$ wahr
(A10)	($\neg$ wahr) $=$ falsch
(A11)	($\neg$ falsch) $=$ wahr
(A12)	$\forall A$ **mit** A **gilt** $A =$ wahr;
(A13)	$\forall x$ **mit** x : Objekt **gilt** $x = x$;

(S1)	$\neg$ falsch;
(S2)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; A; B **gilt** $A \wedge B$;
(S3)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
(S4)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
(S5)	$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $(A \vee A) \Leftrightarrow A$;
(S6)	$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$;
(S7)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$;
(S8)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert **gilt** $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$;
(S9)	$\forall A, B, C$ **mit** A, B, C : Wahrheitswert **gilt** $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;
(S10)	$\forall A, B, C$ **mit** A, B, C : Wahrheitswert **gilt** $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$;
(S11)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; A **gilt** $A \vee B$;
(S12)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; B **gilt** $A \vee B$;
(S13)	$\forall A, B, C$ **mit** A, B, C : Wahrheitswert **gilt** $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$
(S14)	$\forall A, B, C$ **mit** A, B, C : Wahrheitswert **gilt** $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$
(S15)	$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $(\neg\neg A) \Leftrightarrow A$;
(S16)	(wahr = falsch) $\Rightarrow \forall B$ **mit** B : Wahrheitswert **gilt** B;
(S17)	wahr $\neq$ falsch;
(S18)	$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert; $A; \neg A$ **gilt** wahr = falsch;
(S19)	$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert; $A = \neg A$ **gilt** wahr = falsch;
(S20)	($\exists$Widerspruch)$\Leftrightarrow$(wahr = falsch);
(S21)	$\neg\exists$Widerspruch;
(S22)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; $A \Rightarrow B; B \Rightarrow A$ **gilt** $A \Leftrightarrow B$
(S23)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; $A \vee B; \neg A$ **gilt** B;
(S24)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; $A \vee B; \neg B$ **gilt** A;
(S25)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ **gilt** $A \Rightarrow B$;
(S26)	$\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert; $\neg A$ **gilt** $A =$ falsch;

Beim Lesen: Fehler finden

Wenn Sie in der Lage sind, vorgegebene mathematische Texte zu verbessern, dann können Sie diese Fähigkeit auch auf Ihre eigenen Beweise anwenden. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt einige Lösungsversuche zu ausgewählten Übungsaufgaben vorgestellt, die Sie überprüfen und, falls nötig, korrigieren sollen.

Bei der Korrektur müssen Sie im Wesentlichen folgende Kriterien anlegen:

- Sind die benutzten Objekte durch Beweisschritte bereitgestellt worden, oder fallen sie vom Himmel?

- Sind Ausdrücke korrekt geklammert und sind die Argumente der Zuordnungen jeweils zulässig?
- Wird der Vorrat an geltenden Aussagen nur durch klar benannte Beweisschritte vergrößert?
- Werden die Anwendungsbedingungen für die Schritte *ganz genau* eingehalten?

Beim Korrigieren geht es *nicht* darum, ob Sie (glauben zu) verstehen, was der Lösungsautor gemeint hat und ob sich seine Argumentation überzeugend anhört, sondern allein darum, ob er sich an die vereinbarten Beweisschritte hält und ob die jeweils zulässig und vollständig durchgeführt sind. Die für die Beweisschritte benötigten kleinen Checklisten werden weiter unten zusammengefasst.

Sobald Sie diese Checklisten verinnerlicht haben, können Sie Beweise korrigieren oder überprüfen, *ohne* überhaupt verstehen zu müssen, worum es in dem Beweis eigentlich geht. Es handelt sich hier also um eine stur erlernbare Tätigkeit, die keine tiefen Einsichten oder Kreativität verlangt. Warum aber diese ganze Pedanterie? Hier die Vorteile:

- Wenn Argumentationen maschinell kontrollierbar sind, dann ist es nicht möglich zu *überreden* oder zu *suggerieren* und dadurch letztlich zu *täuschen.*
- Wenn sie die Kontrolle durchführen können, dann können Sie ihre eigenen Lösungsversuche in die richtige Form bringen.
- Da nur vergleichsweise wenige Schritte zulässig sind, wird die Auswahl erleichtert. Die Einschränkungen helfen also, einen Lösungsansatz überhaupt zu finden.
- Besonders in komplizierter werdenden Situationen, wo sich Beweise über viele Hilfssätze und noch mehr Seiten erstrecken, wird es enorm wichtig, sich selbst *objektiv* davon überzeugen zu können, ob die Argumentation wirklich logisch korrekt und konsistent ist.

Hier nun die entscheidenden Checklisten:

Kompression
Schrittname erkennbar? Zu komprimierende Aussage $x : B$ angegeben? B ist durch Bedingung definiert? Alle Aussagen aus der Definition von B mit x anstelle der Platzhalter gelten?

Existenznachweis
Begriff B benannt? Gilt eine Aussage der Form $x : B$?

direkter Beweis (Implikation)
Schrittname erkennbar? Zusatzannahme A angegeben? Folgerung B am Ende angegeben? Schrittende erkennbar?

direkter Beweis (für-alle-Aussage)
Schrittname erkennbar? Zusatzobjekte x und Annahmen B angegeben? Folgerung F am Ende angegeben? Schrittende erkennbar?

Widerspruchsbeweis
Schrittname erkennbar? Zusatzannahme A angegeben? (wahr = falsch) am Ende nachgewiesen? Schrittende erkennbar?

Gegenbeispiel
Schrittname erkennbar? Gegenbeispiel angegeben? Satz angegeben, für den das Objekt ein Gegenbeispiel ist?

Ersetzung
Schrittname erkennbar? Aussage $A = B$ angegeben? Gilt $A = B$? Aussage U angegeben, in der ersetzt werden soll? Gilt U? Aussage V angegeben, die durch Ersetzung in U entsteht?

Anwendung (Implikation)
Schrittname erkennbar? Benutzte Implikation $A \Rightarrow B$ klar? Gilt die Implikation? Gilt A?

Anwendung (für-alle-Aussage)
Schrittname erkennbar? Ist die benutzte Regel $\forall x$ **mit** B **gilt** F angegeben? Gilt die Regel? Ist das einzusetzende Objekt u angegeben? Erfüllt u anstelle von x die Voraussetzungen B? Ist die Folgerung durch Ersetzung der Platzhalter x in F durch u entstanden?

Expansion
Schrittname erkennbar? Ist Aussage $x : B$ angegeben? Gilt $x : B$? Sind die Folgerungen durch Ersetzung der Platzhalter in der Bedingung zu B mit x entstanden?

Beispielwahl
Schrittname erkennbar? Ist Begriff B erkennbar, für den ein Beispiel angenommen wird? Gilt $\exists B$? Hat das Beispiel einen Namen? Ist die Folgerung G ist vor Durchführung des Schritts formulierbar (insbesondere ohne den Beispielnamen)? G nachgewiesen? Schrittende erkennbar?

Fallunterscheidung
Schrittname erkennbar? Zugrundeliegende oder-Aussage $A \vee B$ benannt? Gilt $A \vee B$? Fall A angegeben? Gewünschte Zielaussage F benannt und nachgewiesen? Fall B angegeben? Gleiche Zielaussage F nachgewiesen? Beweisschrittende erkennbar?

Gegenbeispielwahl
Schrittname erkennbar? Name für Gegenbeispiel angegeben? Zugrundeliegende für-alle-Aussage benannt? Gilt ihr Gegenteil? Gewünschte Zielaussage G ist vor Durchführung des Schritts formulierbar (insbesondere ohne den Beispielnamen)? G nachgewiesen? Beweisschrittende erkennbar?

In den folgenden Aufgaben ist jeweils ein Lösungsvorschlag angegeben. Darin sollen Sie Häkchen notieren, um korrekte Schritte zu kennzeichnen. Fehler sind durch Verbesserungen am Rand oder zwischen den Zeilen zu markieren. Ihre Gesamtbewertung soll in der Form k/b abgegeben werden, d.h. wenn im vorgeschlagenen Beweis zum Beispiel $b = 7$ Schritte benötigt werden und $k = 4$ davon korrekt angegeben sind, dann lautet die Bewertung 4/7.

Aufgabe 2.28. Beweisen Sie mit Hilfe der de Morganschen Tautologie die folgende für-alle-Aussage

$$\forall A, B \textbf{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert}; \neg(A \vee B) \textbf{ gilt } (\neg A) \wedge (\neg B);$$

Lösungsvorschlag

Anwendung der de Morganschen Tautologie ergibt

$$(\neg(A \vee B)) = ((\neg A) \wedge (\neg B))$$

Ersetze damit $\neg(A \vee B)$ durch $((\neg A) \wedge (\neg B))$.

Aufgabe 2.29. Beweisen Sie den folgenden Satz

$$\forall A, B \textbf{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert}; A \textbf{ gilt } A \vee B;$$

Lösungsvorschlag

Wende (A12) an auf A. Dann gilt $A = \text{wahr}$.
Wenn $B = \text{wahr}$: $(\text{wahr} \vee \text{wahr}) = \text{wahr}$.
Wenn $B = \text{falsch}$: $(\text{wahr} \vee \text{falsch}) = \text{wahr}$.
Also $(A \vee B) = \text{wahr}$.
Ersetze damit *wahr* im Axiom **Es gilt** wahr durch $A \vee B$. Es gilt also $A \vee B$.

Aufgabe 2.30. Zeigen Sie folgenden Satz

$$\forall A, B \textbf{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert}; A \vee B; \neg A \textbf{ gilt } B;$$

Lösungsvorschlag

Direkter Beweis: Gegeben A, B mit A, B : Wahrheitswert; $A \vee B$, $\neg A$
(A12) angewendet auf $\neg A$: $\neg A =$ wahr
(A10): ($\neg$ wahr) = falsch, ersetze *wahr* mit $\neg A$: $(\neg(\neg A)) =$ falsch
(S15) angewendet auf A: $(\neg(\neg A)) = A$.
Ersetze $(\neg(\neg A))$ mit A: $A =$ falsch.
(A12) angewendet auf $A \vee B$: $(A \vee B) =$ wahr.
Ersetze A mit falsch: (falsch $\vee B$) = wahr.
Fallunterscheidung: Fall $B =$ wahr: (falsch $\vee$ wahr) = wahr ((A7)).
Fall $B =$ falsch: (falsch $\vee$ falsch) = falsch ((A6)).
Da wahr $\neq$ falsch, ist Fall $B =$ falsch nicht zutreffend und der andere Fall $B =$ wahr gilt ∎

3 Mengenlehre

Mit der bisher vorgestellten Sprache befinden wir uns gedanklich in einer Situation, die den Vorstellungen zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts entspricht: Durch die Angabe von Bedingungen werden Begriffe formuliert und die Objekte, die die Bedingungen erfüllen nennt man seine Beispiele. Stellt man sich die *Zusammenfassung* aller Beispiele des Begriffs als neues Objekt vor, so nennt man dies eine *Menge*, wobei die Beispiele auch *Elemente* der Menge bezeichnet werden.

Obwohl dieser Zugang plausibel und vernünftig klingt, schlummert in ihm doch eine logische Falle, die der englische Philosoph und Mathematiker Bertrand Russell (1872-1970) auf den Punkt brachte. Als Konsequenz seines, für die damalige Mathematik, erschütternden Beispiels, wurde die Mengenlehre auf neue axiomatische Füße gestellt. Sie bildet heute die Grundlage für die Definition fast aller mathematischen Strukturen und Objekte.

3.1 Krise der Mathematik

Wir beginnen sofort mit der Idee von Bertrand Russell in Form einer einfachen Begriffsdefinition

$R := x$ **mit** x : Begriff; $\neg(x : x)$ □

Das Fatale an dieser Definition ist, dass sie die folgende logische Argumentation ermöglicht:

Wir wenden den Shakespeare-Satz $\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $A \vee \neg A$ auf die Aussage $R : R$ an und erhalten $(R : R) \vee \neg(R : R)$. Auf dieser oder-Aussage basieren wir eine Fallunterscheidung. Im Fall $R : R$ ergibt die Expansion, dass $\neg(R : R)$ gilt. Damit können wir $(R : R)$: Widerspruch komprimieren.

Im Fall $\neg(R : R)$ können wir $R : R$ komprimieren und erhalten durch eine weitere Kompression wieder $(R : R)$: Widerspruch.

Da wir in beiden Fällen auf das gleiche Resultat kommen, gilt also $(R : R)$: Widerspruch und somit $\exists$Widerspruch. Mit den Ergebnissen der Übungsaufgaben folgt daraus zwangsläufig die Situation (wahr = falsch), womit die Mathematik in der bisherigen Form sinnlos ist!

Den Schreck, den das Russellbeispiel auslöste, kann man sich nun vielleicht vorstellen: Die ganze Arbeit, die in den vielen Beweisen und Argumentationen aller Mathematiker steckte, war mit einem Schlag nutzlos geworden, weil in dem logischen System, auf den sich die Beweise begründen ein Widerspruch vorliegt und deshalb nach Satz (S16) sowieso alle Aussagen gelten!

Aber wie kann man die Situation reparieren? Eine genauere Analyse zeigt, dass die Schwierigkeiten dadurch entstehen, dass das Erfüllen einer Begriffsbedingung ein Objekt bereits zum Beispiel des zugehörigen Begriffs macht. Dass Menschen intuitiv davon ausgehen, dass zwischen den beiden Konzepten *Bedingung-erfüllen* und *Beispiel-sein* kein Unterschied besteht, liegt wohl daran, dass man in der Sprache üblicherweise Bedingungen an *Dinge* stellt, also letztlich an etwas, das in der Welt materiell existiert.

Da in der mathematischen Welt aber nichts materiell ist, ist leider auch nicht von vorneherein klar, was das Pendant zu einem *Ding* ist und was nicht. Klar ist mit dem Russellschen Beispiel nur, dass es Probleme macht, *alle* Begriffe wie Dinge zu behandeln.

Da wir durch das Russellsche Beispiel vorsichtig geworden sind, wollen wir nun begrifflich zwischen dem Bedingung-erfüllen und dem Beispiel-sein unterscheiden.

Ist E ein Begriff von der Form $(x\ \textbf{mit}\ B\ \square)$, dann steht $u :: E$ für die Aussage, dass u die Bedingung von E *erfüllt*. Zum Nachweis, dass eine solche Aussage gilt, wird der bereits bekannte Kompressionsschritt verwendet, der als Vorbedingung hat, dass u anstelle des Platzhalters x alle Aussagen aus B erfüllt. Gilt umgekehrt eine Aussage der Form $u :: E$, dann zeigt ein Expansionsschritt, dass auch alle Aussagen aus B mit u anstelle von x gelten.

Wichtig ist, dass rechts von :: immer eine Begriff mit einer explizit hinterlegten Bedingung stehen muss - Platzhalter sind also nicht zulässig.

Die Aussage $u : A$ steht weiterhin dafür, dass *u ein Beispiel* von *A ist*. Hier zwingt uns das Russellsche Beispiel aber zu einer leichten Abänderung der Logik: Während der Expansionsschritt genauso funktioniert wie bisher, ist beim Kompressionsschritt nicht nur zu zeigen, dass u die Bedingung des Begriffs A erfüllt, sondern das auch noch eine Aussage der Form $x : C$ gilt, mit irgendeinem Begriff C. Es muss also zusätzlich gezeigt werden, dass x bereits etwas *ist*. Objekte die etwas *sind* spielen nun in der Mathematik die Rolle der *Dinge* in der normalen

Welt.

Aus der neuen Kompressionsbedingung ergibt sich sofort, dass ohne geltende ist-Aussagen nicht auf neue ist-Aussagen geschlossen werden kann. Verschiedene Axiome stellen nun Ausgangs-ist-Aussagen zur Verfügung, die im wesentlichen Begriffen mit endlich vielen Besipielen den ist-Status verleiht. Die Axiome sind im Abschnitt A zusammengefasst. Dort stehen auch die aktualisierten Beweisschritte.

Die Axiome der Mengenlehre, die wir im nächsten Abschnitt vorstellen, führen diese Grundidee im Prinzip fort, wobei die Endlichkeitseinschränkung kontrolliert aufgehoben wird, um die Welt der mathematischen Dinge reichhaltiger zu gestalten.

Ob die modifizierten Regeln das Grundproblem des Russellschen Beispiels wirklich beheben, können Sie sich in den Aufgaben 3.1 und 3.2 genauer anschauen.

Aufgabe 3.1. Zeigen Sie, dass für den Begriff

$R := x$ **mit** $x : \text{Begriff}; \neg(x : x)$ □

mit den neuen Beweisregeln folgende Aussagen gelten:

$\neg(R : R); \quad R :: \text{Begriff}; \neg(R : \text{Begriff});$

Aufgabe 3.2. Zeigen Sie, dass für den Begriff

$R := x$ **mit** $x :: \text{Begriff}; \neg(x : x)$ □

mit den neuen Beweisregeln folgende Aussagen gelten:

$\neg(R : R); \quad R :: R;$

3.2 Basis der Mengenlehre

Allgemein formuliert ist die Mengenlehre ein mathematisches *Modell*, das die Muster und Regeln beim Zusammenfassen, Ordnen und Aufteilen von Dingen beschreibt. Ein Modell ist dabei ein gedanklicher Rahmen, in dem gewisse Objekte zur Verfügung stehen, die einer Liste von anzugebenden Bedingungen, den sogenannten Modellaxiomen, genügen.

Im Fall der Mengenlehre gibt es nur ein einziges grundlegendes Objekt mit Namen *Element*. Es handelt sich dabei um eine Zuordnung, d.h. das erste Axiom der Mengenlehre ist

(M1) Element :: Zuordnung;

Allgemein nennen wir ein Objekt x, das man in eine Zuordnung F einsetzen darf, ein zulässiges *Argument* von F. Um dies ausdrücken zu können, gibt es zu jeder Zuordnung F den Begriff Argument(F). Gilt nun x : Argument(F), dann erfüllt der Ausdruck $F(x)$ die Bedingungen an ein Objekt, d.h. es gilt $F(x)$ :: Objekt.

Die Argumente der Zuordnung *Element* nennen wir *Mengen*

Menge := Argument(Element);

Ist M eine Menge (d.h. gilt M : Menge), dann dürfen wir die Zuordnung *Element* auf M anwenden. Dass Element(M) (gelesen wie üblich als *Element von* M) ein Begriff ist, besagt das zweite Axiom

(M2) $\forall M$ **mit** M : Menge **gilt** Element(M) : Begriff;

Aufgrund dieser Annahme können wir für jedes Objekt x und jede Menge M die Aussage x : Element(M) bilden (lies: *x ist ein Element von M*), die in der Mengenlehre üblicherweise mit der Infix-Schreibweise $x \in M$ abgekürzt wird.

Zuerst müssen wir allerdings die entsprechende Präfixform der Zuordnung vereinbaren, womit wir zu unserer ersten expliziten Zuordnungsdefinition kommen:

Elementrelation(x, M **mit** M : Menge) :=
  (x : Element(M)) . . . : Wahrheitswert;

Ganz links steht dabei der gewünschte Name der Zuordnung gefolgt von einer runden Klammer, in der die Bedingung an die Argumente angegeben ist. Rechts von := steht der Zuordnungsausdruck gefolgt von drei Punkten und einem Ausdruck der Form : C bzw. :: C mit einem Begriff C, der eine entsprechende Eigenschaft des Zuordnungsergebnisses angibt. Wichtig bei der Definition von Zuordnungen ist, dass der Zuordnungsausdruck die formulierte Anforderung auch erfüllt, sofern der Argumentplatzhalter den angegebenen Bedingungen gehorcht. Nur wenn das so ist, erfüllt das resultierende Objekt die Bedingung des Begriffs *Zuordnung*.

Im vorliegenden Beispiel ist dies nicht unmittelbar ersichtlich: Zwar ist M als Menge angenommen und somit ein zulässiges Argument der Zuordnung *Element*, so dass Element(M) gebildet werden kann. Aber daraus folgt zunächst nur, dass

Element(M) :: Objekt gilt. Erst die Anwendung von (M2) zeigt, dass Element(M) sogar ein Begriff ist, wodurch die Bildung der ist-Aussage erst zulässig wird.

In solchen Fällen, wo die angegebene Eigenschaft des Argumentausdrucks sich nicht bereits aus den Grundregeln ergibt, muss sie in einem sogenannten Beweis der *Wohldefiniertheit* direkt nach der Definition bewiesen werden.

In einem Beweis der Wohldefinition nehmen wir an, x, M liegen vor und M : Menge gilt. Anwendung von (M2) auf M zeigt dann Element(M) : Begriff. Damit gilt für $Y :=$ (x : Element(M)) die Aussage Y : Wahrheitswert ■

Die Argumentbedingungen und Ergebniseigenschaften der Grundzuordnungen gehören zu den Regeln der Sprache und müssen (bzw. können) nicht argumentativ begründet werden. Sie sind im Anhang A zusammengefasst.

Da nicht jeder Begriff als Ergebnis von *Element* auftreten wird (die Axiome werden dafür sorgen, dass zum Russellschen Beispiel *keine* Menge gehört), ist es sinnvoll, die Begriffe mit einer Mengenzugehörigkeit gesondert zu benennen. Genauer wollen wir alle Begriffe B, zu denen es eine Menge M gibt mit der Eigenschaft $B =$ Element(M), als *Elementbegriffe* bezeichnen.

Dazu definieren wir zuerst den Begriff MengeZu(B), dessen Beispiele die Mengen sind, die $B =$ Element(M) erfüllen. Die Forderung an einen Elementbegriff B ist dann, dass eine Menge zu B existiert, dass also $\exists$MengeZu(B) gilt.

An der Art, wie wir *MengeZu* nutzen wollen, erkennen wir bereits, dass es eine Zuordnung sein muss, die zu einem beliebigen Objekt B den Begriff MengeZu(B) erzeugt. Genauer definieren wir

MengeZu(B **mit** B :: Objekt) :=
  M **mit** M : Menge; Element(M) $= B$ □ . . . :: Begriff;

In diesem Fall muss die Wohldefiniertheit nicht bewiesen werden, da sie bereits aus den Grundregeln der Sprache folgt. Im Zuordnungsausdruck M **mit** M : Menge; Element(M) $= B$ □ werden nämlich alle Argumentbedingungen an die beteiligten Zuordnungen eingehalten: Wegen der Annahme M : Menge, darf Element(M) gebildet werden und erfüllt damit Element(M) :: Objekt. Außerdem ist für den Argumentplatzhalter B die Aussage B :: Objekt erfüllt, so dass die Argumentbedingung an die Gleichheitszuordnung ebenfalls erfüllt ist. Da alle Bestandteile des Gesamtausdrucks korrekt gebildet sind, erfüllt er die Bildungsbedingungen an einen Begriff, d.h. es gilt automatisch (M **mit** M : Menge; Element(M) $= B$ □) :: Begriff.

Nun können wir unseren ursprünglichen Plan weiterverfolgen und die Begriffe auszeichnen, zu denen eine Menge gehört

$$\text{Elementbegriff} := B \ \textbf{mit} \ \exists\text{MengeZu}(B) \ \square;$$

Zwar suggeriert der Name *Elementbegriff*, dass jedes seiner Beispiele ein Begriff ist, aber da Namen frei wählbar sind, kann daraus nichts gefolgert werden – was wir brauchen ist der Nachweis, dass eine entsprechende Aussage gilt! Im vorliegenden Fall wäre das

$$\forall B \ \textbf{mit} \ B : \text{Elementbegriff} \ \textbf{gilt} \ B : \text{Begriff};$$

Den Beweis dafür, führen Sie in den Übungen.

Wenn, wie im betrachteten Fall, jedes Beispiel eines Begriffs A automatisch Beispiel eines Begriffs B ist, dann sagen wir auch, A ist *spezieller* als B. Die entsprechende Satzaussage wollen wir mit der Infix-Notation $A \sqsubset B$ abkürzen, was wir als A *spezialisiert* B aussprechen. Die Zuordnung in Präfix-Form ist dabei gegeben durch

$$\begin{aligned}&\text{Spezialisierung}(A, B \ \textbf{mit} \ A, B :: \text{Begriff}) := \\ &\quad \forall x \ \textbf{mit} \ x : A \ \textbf{gilt} \ x : B \ \ldots : \text{Wahrheitswert};\end{aligned}$$

Ein Beweis der Wohldefiniertheit muss hier wieder nicht geführt werden, da diese aus den Grundregeln folgt.

An diese Stelle sei erwähnt, dass Gleichheit von zwei Begriffen dann vorliegt, wenn sie genau die gleichen Beispiele besitzen, wenn also sowohl $A \sqsubset B$ als auch $B \sqsubset A$ gilt. Das Axiom zur Gleichheit von Begriffen ist daher

(A14) $\forall A, B \ \textbf{mit} \ A, B :: \text{Begriff}; \ A \sqsubset B; B \sqsubset A \ \textbf{gilt} \ A = B;$

Unsere eben bewiesene Aussage können wir nun in knapper Form so schreiben

(S27) $\text{Elementbegriff} \sqsubset \text{Begriff}$

Umgekehrt sind die Ergebnisse von *Element* immer Elementbegriffe

(S28) $\forall M \ \textbf{mit} \ M : \text{Menge} \ \textbf{gilt} \ \text{Element}(M) : \text{Elementbegriff};$

In einem direkten Beweis gehen wir von einer Menge M aus. Anwendung von (A13) auf $\text{Element}(M)$ zeigt $\text{Element}(M) = \text{Element}(M)$, so dass $M : \text{MengeZu}(\text{Element}(M))$ komprimiert werden kann. Da nun $\exists\text{MengeZu}(\text{Element}(M))$ gilt, ergibt eine weitere Kompression $\text{Element}(M) :$ Elementbegriff ∎

Eine enge Verbindung zwischen Mengen und den zugeordneten Begriffen entsteht durch das dritte Axiom

(M3) $\forall M, N$ **mit** $M, N :$ Menge; Element$(M) =$ Element(N) **gilt** $M = N$;

da hiermit zu jedem Elementbegriff *genau eine* Menge existiert. An dieser Stelle ist es wichtig, die genauere Bedeutung der Aussage $!B$ zu erklären, die dafür steht, dass ein Begriff B höchstens ein Beispiel besitzt. Es ist eine Abkürzung für die Satzaussage

$\forall u, v$ **mit** $u, v : B$ **gilt** $u = v$;

die besagt, dass je zwei Beispiele von B immer übereinstimmen. Gilt dieser Satz, so kann B offensichtlich keine zwei verschiedenen Beispiele haben, da diese ein Gegenbeispiel bilden würden. Wenn B aber keine zwei verschiedenen Beispiele hat, dann kann B höchstens ein Beispiel besitzen. Ganz präzise beschrieben, verwenden wir $!B$ als Abkürzung für Eindeutigkeit(B), wobei

Eindeutigkeit(B **mit** $B ::$ Begriff) :=
  $\forall u, v$ **mit** $u, v : B$ **gilt** $u = v$ ...: Wahrheitswert;

Erst mit dieser genauen Beschreibung der höchstens-ein-Beispiel Aussage können wir den folgenden Satz zeigen.

(S29) $\forall B$ **mit** $B :$ Elementbegriff **gilt** $\exists!$MengeZu(B);

Zum Nachweis des Satzes benutzen wir einen direkten Beweis. Sei dazu B vorgegeben mit $B :$ Elementbegriff. Nach Expansion wissen wir, dass $\exists$MengeZu(B) gilt. Für den Nachweis von !MengeZu(B) nehmen wir in einem direkten Beweis an, dass u, v vorgegeben sind mit $u, v :$ MengeZu(B). Eine Expansion der beiden ist-Aussagen ergibt dann $u, v :$ Menge, sowie Element$(u) = B$ und Element$(v) = B$. Ersetzung der ersten Gleichheit durch Element$(u) =$ Element(v) mit Hilfe der zweiten Gleichheit, erlaubt uns, das dritte Mengenaxiom auf (u, v) anzuwenden. Somit erhalten wir $u = v$ was den Eindeutigkeitsbeweis schließt ■ Nun können wir $\exists!$MengeZu(B) komprimieren ■

Nun steht für jeden Begriff U mit der Eigenschaft $\exists!U$ die Konkretisierung $\downarrow U$ zur Verfügung, die das eindeutige Beispiel von U bezeichnet. Über das Ergebnis $\downarrow U$ ist von vorneherein bekannt, dass es ein Beispiel von U ist. Definieren wir nun

Beispielmenge(B **mit** $B :$ Elementbegriff) :=$\downarrow$MengeZu(B) ...: Menge;

Zum Nachweis der Wohldefiniertheit nehmen wir an, dass ein Objekt B gegeben ist mit B : Elementbegriff. Anwendung von (S29) zeigt $\exists!$MengeZu(B), so dass $Y :=\downarrow$MengeZu(B) gebildet werden kann. Außerdem erfüllt Y als Ergebnis der Konkretisierungszuordnung die Bedingung Y : MengeZu(B). Eine Expansion ergibt schließlich Y : Menge ■

Ein direkter Beweis, der sehr ähnlich zum Wohldefiniertheitsbeweis abläuft und in Aufgabe 3.6 durchzuführen ist, zeigt nun

(S30) $\forall B$ **mit** B : Elementbegriff **gilt** Element(Beispielmenge(B)) $= B$;

Die Zuordnung *Element* macht somit die Zuordnung *Beispielmenge* rückgängig weshalb wir sie auch die *inverse* Zuordnung nennen.

Mit dem Resultat können wir schnell zeigen, dass x genau dann ein Element der Beispielmenge von B ist, wenn x ein Beispiel von B ist, was der folgende Satz besagt

(S31) $\forall x, B$ **mit** B : Elementbegriff **gilt** ($x \in$ Beispielmenge(B)) $=$ ($x : B$);

In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass Objekte x, B vorliegen und dass die Aussage B : Elementbegriff gilt. Durch Anwendung von (S30) folgt zunächst Element(Beispielmenge(B)) $= B$. Weiter ergibt eine Anwendung von Elementbegriff $\sqsubset$ Begriff auf B die Aussage B : Begriff. Anwendung von Axiom (A13) auf ($x : B$) ergibt nun ($x : B$) $=$ ($x : B$). Ersetzen wir auf der linken Seite mit der oben gezeigten Gleichheit, so folgt (x : Element(Beispielmenge(B))) $=$ ($x : B$). Mit unserer Schreibkonvention ist dies aber gerade die Folgerung ■

Während wir bereits gesehen haben, dass die Zuordnung *Element* invers zur Zuordnung *Beispielmenge* ist, können wir auch die umgekehrte Situation zeigen, also

(S32) $\forall M$ **mit** M : Menge **gilt** Beispielmenge(Element(M)) $= M$;

In einem direkten Beweis gehen wir von einem Objekt M aus, für das M : Menge gilt. Als Abkürzung setzen wir nun $B :=$ Element(M). Anwendung von (S28) auf M zeigt B : Elementbegriff und Anwendung von (S30) auf B zeigt Element(Beispielmenge(B)) $= B$. Axiom (M3) angewendet auf (Beispielmenge(B), M) ergibt schließlich Beispielmenge(B) $= M$ ■

Sind A, B zwei Mengen, dann können wir die Aussage $\text{Element}(A) \sqsubset \text{Element}(B)$ bilden, die dafür steht, dass *jedes Element von A ein Element von B ist*, bzw. dass die Elemente von A Spezialfälle der Elemente von B sind. Im Fall von Mengen sagt man in diesem Fall auch A ist eine *Teilmenge* von B und schreibt zur Abkürzung $A \subset B$. Zum Erleichtern des Umgangs mit Teilmengen, benutzen wir folgenden Satz, der sich allein durch Auflösen von Abkürzungen ergibt.

(S33) $\quad \forall A, B$ **mit** $A, B : \text{Menge}; \forall x$ **mit** $x \in A$ **gilt** $x \in B$ **gilt** $A \subset B$;

In ähnlicher Weise erlaubt unser Axiom über die Gleichheit von Begriffen, einen Satz zur Mengengleichheit zu beweisen, der sehr häufig benutzt wird

(S34) $\quad \forall A, B$ **mit** $A, B : \text{Menge}; A \subset B; B \subset A$ **gilt** $A = B$;

In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass zwei Mengen A, B vorliegen, die $A \subset B$ und $B \subset A$ erfüllen. Führen wir als Abkürzung $a := \text{Element}(A)$ und $b := \text{Element}(B)$ ein, so wissen wir zunächst durch Anwendung von (M2) auf A, B, dass $a, b : \text{Begriff}$ gilt. Außerdem ist $A \subset B$ eine Abkürzung von $a \sqsubset b$ und entsprechend $B \subset A$ für $b \sqsubset a$. Anwendung des Axioms (A14) zur Gleichheit von Begriffen auf (a, b) liefert nun $a = b$. Axiom (M3) angewendet auf A, B zeigt schließlich $A = B$ ∎

Aufgabe 3.3. Geben Sie Definitionen für die beiden Zuordnungen *Äquivalenz* und *EntwederOder* an und führen Sie anschließend die üblichen Infix-Symbole $\Leftrightarrow$ und $\oplus$ ein.

Aufgabe 3.4. Zwei Objekten x, y und einem Wahrheitswert A soll ein Begriff zugeordnet werden, dessen Beispiel x ist, wenn A gilt und y, wenn das Gegenteil zutrifft. Definieren Sie eine entsprechende Zuordnung mit Namen *Auswahlbegriff*.

Gilt für jede Belegung (x, y, A) der Argumente $\exists!\text{Auswahlbegriff}(x, y, A)$? Formulieren Sie einen entsprechenden Satz und beweisen Sie ihn.

Definieren Sie eine Zuordnung *Auswahl*, die den Argumenten (x, y, A) das eindeutige Beispiel von Auswahlbegriff zuweist.

Aufgabe 3.5. Beweisen Sie den Satz

$\forall B$ **mit** $B : \text{Elementbegriff}$ **gilt** $B : \text{Begriff}$;

Aufgabe 3.6. Beweisen Sie

$\forall B$ **mit** B : Elementbegriff **gilt** Element(Beispielmenge(B)) $= B$;

Aufgabe 3.7. Beweisen Sie den Satz

$\forall M$ **mit** M : Menge **gilt** (x **mit** $x \in M$ $\square$) $=$ Element(M);

Zeigen Sie dann

$\forall M$ **mit** M : Menge **gilt** Beispielmenge(x **mit** $x \in M$ $\square$) $= M$;

Aufgabe 3.8. Beweisen Sie die Aussage

$\forall A, B$ **mit** A, B : Menge; $\forall x$ **mit** x :: Objekt **gilt** $(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$ **gilt** $A = B$;

3.3 Konkrete Mengen

Einige weitere Mengenaxiome sind Postulate, die besagen, dass bestimmte Begriffe sogar Elementbegriffe sind. Durch die zugehörigen Beispielmengen stellen diese Axiome damit Mengen zur Verfügung.

Das einfachste konkrete Mengenbeispiel ist die sogenannte *leere Menge*, für die man auch die Symbole $\{\}$ oder $\emptyset$ benutzt. Das dahinter liegende vierte Axiom über die Element-Zuordnung ist

(M4) Widerspruch : Elementbegriff;

Da $\emptyset$ nur eine Abkürzung von Beispielmenge(Widerspruch) ist, folgt sofort

(S35) Element($\emptyset$) $=$ Widerspruch;

Anwendung von (S30) auf Widerspruch zeigt die Behauptung ■

Damit hat $\emptyset$ tatsächlich keine Elemente, d.h. es gilt

(S36) $\neg\exists$Element($\emptyset$)

Zunächst gilt $\neg\exists$Widerspruch (Aussage (S21)). Eine Ersetzung mit Element($\emptyset$) = Widerspruch liefert das Ergebnis.

Indirekte Beweise enden oft mit einer Widersprüchlichkeit, die auf folgendem Satz beruht, den Sie in Aufgabe 3.9 zeigen.

(S37) $\forall x$ **mit** $x \in \emptyset$ **gilt** wahr = falsch;

Mit dem folgenden Hilfsatz (anstelle von Hilfsatz spricht man in der Mathematik auch oft von einem *Lemma*) werden wir zeigen, dass die leere Menge Teilmenge jeder anderen Menge ist

(S38) $\forall B$ **mit** B :: Begriff **gilt** Element($\emptyset$) $\sqsubset B$;

In einem direkten Beweis gehen wir von einem Objekt B aus, das B :: Begriff erfüllt. Zum Nachweis von Widerspruch $\sqsubset B$ führen wir einen direkten Beweis und nehmen an, dass ein x gegeben ist mit x : Widerspruch. Damit gilt $\exists$Widerspruch. Gleichzeitig gilt aber auch $\neg\exists$Widerspruch, so dass wir Satz (S18) auf $\exists$Widerspruch anwenden können, um (wahr = falsch) zu erhalten. Anwendung von (S16) ergibt nun den Satz, dass jede Aussage gilt, den wir auf (x : B) anwenden ■ Ersetzen wir nun noch Widerspruch durch Element($\emptyset$), so folgt die Behauptung ■

In Aufgabe 3.10 wird mit diesem Satz zunächst gezeigt, dass die leere Menge Teilmenge jeder anderen Menge ist. Außerdem folgt daraus, dass es nur eine Menge gibt, die keine Elemente besitzt, also

(S39) $\forall A$ **mit** A : Menge **gilt** $\emptyset \subset A$;
(S40) $\forall M$ **mit** M : Menge; $\neg\exists$Element(M) **gilt** $M = \emptyset$;

Alle anderen Mengen sind also *nichtleer* im folgenden Sinne

nichtleer := M **mit** M : Menge; $\exists$Element(M) □

Weitere konkrete Beispiele sind *Paarmengen*, deren zugehörige Elementbegriffe vorgegebene Objekte x, y als Beispiele besitzen. Das entsprechende Axiom lautet

(M5) $\forall x, y$ **mit** x, y : Objekt **gilt**
(u **mit** $(u = x) \vee (u = y)$ □) : Elementbegriff;

Es erlaubt uns, eine Zuordnung zu definieren (der Nachweis der Wohldefinition erfolgt in Aufgabe 3.11)

Paarmenge(x, y **mit** x, y : Objekt) :=
  Beispielmenge(u **mit** $(u = x) \vee (u = y)$ $\square$) . . . : Menge;

Als Abkürzung von Paarmenge(x, y) schreiben wir kurz $\{x, y\}$ und für den Spezialfall $\{x, x\}$ einfach $\{x\}$. Unser erstes Ergebnis zu Paarmengen lautet

(S41) $\forall x, y, u$ **mit** x, y : Objekt **gilt** $(u \in \{x, y\}) \Leftrightarrow ((u = x) \vee (u = y))$;

Bei der **Planung** von Beweisen ist es generell wichtig, das jeweilige Beweisziel klar vor sich zu sehen. Im vorliegenden Fall ist unser **Ziel** der Nachweis einer für-alle-Aussage. Aus der Tabelle der Beweisschritte lesen wir ab, das dazu ein direkter Beweis sinnvoll sein kann. Wir gehen also von x, y, u aus, und nehmen an, dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Unser neues Beweis**ziel** ist nun, die Aussage $(u \in \{x, y\}) \Leftrightarrow ((u = x) \vee (u = y))$ zu zeigen. Hierbei handelt es sich letztlich um eine Gleichheitsaussage von Wahrheitswerten. Leider gibt uns die Tabelle hierfür keinen konkreten Hinweis auf einen angepassten Beweisschritt, da Gleichheitsnachweise typischerweise für jeden Objekttyp unterschiedlich verlaufen. Im Fall von Wahrheitswerten gibt es aber den wichtigen Satz (S22), der besagt dass zwei Aussagen A, B gleich (bzw. äquivalent) sind, wenn die beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gelten. Folgen wir dieser Strategie, dann ergeben sich also **zwei Ziele** in Form von zwei Implikationen, die gezeigt werden müssen, um an die gewünschte Gleichheit heranzukommen. Schauen wir uns eins dieser beiden Ziele genauer an, so sehen wir, dass für den Nachweis von $(u \in \{x, y\}) \Rightarrow ((u = x) \vee (u = y))$ ein direkter Beweis in der Tabelle vorgeschlagen wird. Nehmen wir also an, dass $(u \in \{x, y\})$ gilt. Unser neues **Ziel** ist damit, $((u = x) \vee (u = y))$ zu zeigen. Für dieses Ziel bietet unsere Tabelle zwar zunächst keinen Standardschritt an, aber jede geltende Satzaussage, deren Folgerung eine oder-Aussage ist, könnte helfen das Ziel zu erreichen, sofern wir die zugehörigen Voraussetzungen erfüllen können. Beispielsweise kennen wir den Satz (S11), dass $A \vee B$ gilt, wenn A gilt oder auch (S12), nach dem $A \vee B$ gilt, wenn B gilt. Aber warum sollte denn in der bisher herausgearbeiteten Situation $(u = x)$ oder $(u = y)$ gelten? Da wir über x, y, u zunächst nicht viel mehr wissen, als dass es jeweils Objekte sind, lässt sich hier keine weitere Zielverschiebung mehr vornehmen, da für allgemeine Objekte keine konkreten Gleichheitssätze vorliegen.

Es lohnt sich daher, zu überprüfen, ob die bisher angesammelten Annahmen bereits dafür sorgen dass eine der Gleichheiten zutrifft. Machen wir also eine Bestandsaufnahme über unsere Habenseite: Wir wissen x, y : Objekt und u :: Objekt. Außerdem wissen wir $u \in \{x, y\}$. Bei der letzten Aussage sind dabei einige Abkürzungen im Spiel, die wir nun **auflösen**, um genauer zu sehen, was sich dahinter verbirgt. Zunächst können wir die $\in$-Aussage auf eine ist-Aussage zuückführen, d.h. die Langform von $u \in \{x, y\}$ ist u : Element($\{x, y\}$). Weiter ist $\{x, y\}$ eine Kurzform die sich zu Paarmenge(x, y) **auflöst**, wobei die Auswertung in (x, y) möglich ist, weil x, y die Argumentbedingung erfüllen. Der Auswertungsausdruck ist dann aber nur eine Abkürzung für den Zuordnungsausdruck mit unseren eingesetzten Argumenten, also im vorliegenden Fall für Beispielmenge(v **mit** $(v = x) \lor (v = y)$ $\square$). Im Vergleich zur Definition haben wir hier den Platzhalternamen absichtlich auf v geändert, weil wir ein Objekt u bereits in unserer Beweisargumentation benutzen. Die vollständige **Auflösung** von $u \in \{x, y\}$ ist also u : Element(Beispielmenge(v **mit** $(v = x) \lor (v = y)$ $\square$)). Erinnern wir uns nun daran, dass *Element* invers zu *Beispielmenge* ist, dann lässt sich durch Ausnutzung des entsprechenden Satzes auf u : (v **mit** $(v = x) \lor (v = y)$ $\square$) schließen so dass wir unser letztgültiges Ziel $(u = x) \lor (u = y)$ einfach durch eine Expansion erreichen können!

Damit fehlt nur noch der Nachweis unseres zweiten Hilfsziels $((u = x) \lor (u = y)) \Rightarrow (u \in \{x, y\})$. Nach Tabelle versuchen wir dies mit einem direkten Beweis und nehmen dazu an, dass $(u = x) \lor (u = y)$ gilt. Mit den gerade diskutierten Zusammenhängen, wissen wir, dass wir $u \in \{x, y\}$ zur Langform u : Element(Beispielmenge(v **mit** $(v = x) \lor (v = y)$ $\square$)) **auflösen** können. Wegen Satz (S30) erreichen wir dieses Ziel mit einer Ersetzung, wenn wir es schaffen, u : (v **mit** $(v = x) \lor (v = y)$ $\square$) zu zeigen, d.h. wir haben ein neues **Ziel**, das wir durch eine Kompression erreichen könnten, wenn $(u = x) \lor (u = y)$ gelten würde und u Beispiel für irgendeinen Begriff wäre. Eines dieser neuen **Ziele** ist dabei bereits erreicht, weil $(u = x) \lor (u = y)$ ja nach Voraussetzung gilt. Dass u Beispiel eines Begriffs ist, können wir durch Fallunterscheidung zeigen: Im Fall $u = x$ ist u Beispiel von Objekt und im Fall $u = y$ auch.

Im sauberen Aufschrieb des Beweises werden nun alle aufgelisteten Ziele als Etappenziele vorkommen, sie werden aber meist in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen, weil wir bei streng logischem Vorgehen immer von bereits geltenden Aussagen auf neue geltende Aussagen schließen. Hier ist nun die saubere Version:

In einem direkten Beweis seien x, y, u gegeben mit x, y : Objekt. Zur Abkürzung setzen wir $U := v$ **mit** $(v = x) \lor (v = y)$ $\square$ und stellen durch Anwendung von (M5) auf (x, y) fest, dass U : Elementbegriff gilt. Durch Anwendung von Satz (S30) auf U ergibt sich weiter Element(Beispielmenge(U)) $= U$. Mit der Abkürzung $\{x, y\}$ für Beispielmenge(U) lässt sich dies auch in der Form Element($\{x, y\}$) $= U$ schreiben.

Wir zeigen nun die Implikation $(u \in \{x, y\}) \Rightarrow ((u = x) \lor (u = y))$ durch einen direkten Beweis, wobei wir von $u \in \{x, y\}$ ausgehen, was eine Abkürzung von u : Element($\{x, y\}$) ist. Ersetzen wir mit der obigen Gleichheit, so folgt $u : U$. Expansion zeigt dann $(u = x) \vee (u = y)$ ■

Als nächstes zeigen wir die Implikation $((u = x) \vee (u = y)) \Rightarrow (u \in \{x, y\})$ mit einem direkten Beweis und gehen dazu von $(u = x) \vee (u = y)$ aus. Durch eine Fallunterscheidung zeigen wir nun u : Objekt, denn im Fall $u = x$ gilt wegen Ersetzung in x : Objekt auch u : Objekt. Im Fall $u = y$ gilt entsprechend u : Objekt wegen Ersetzung in y : Objekt. Durch Kompression erhalten wir nun $u : U$. Ersetzung mit obiger Gleichheit ergibt dann u : Element($\{x, y\}$) ■

Anwendung von Satz (S22) auf $(u \in \{x, y\}, (u = x) \vee (u = y))$ ergibt nun die gewünschte Äquivalenz ■

Dass die Reihenfolge der Objekte in einer Paarmenge keine Rolle spielt, folgt aus der Vertauschbarkeit der Aussagen in oder-Ausdrücken.

(S42) $\forall x, y$ **mit** x, y : Objekt **gilt** $\{x, y\} = \{y, x\}$;

Wir nutzen das Lemma $L := \forall x, y$ **mit** x, y : Objekt **gilt** $\{x, y\} \subset \{y, x\}$ aus Aufgabe 3.12 in einem direkten Beweis des Satzes. Dazu seien x, y gegeben mit x, y : Objekt. Anwendung von L auf (x, y) bzw. (y, x) liefert zwei Inklusionen $\{x, y\} \subset \{y, x\}$ und $\{y, x\} \subset \{x, y\}$. Anwendung von (S34) ergibt $\{x, y\} = \{y, x\}$ ■

Dass x und y Elemente von $\{x, y\}$ sind, ist zwar nicht überraschend, muss aber trotzdem gezeigt werden.

(S43) $\forall x, y$ **mit** x, y : Objekt **gilt** $x \in \{x, y\}$;
(S44) $\forall x, y$ **mit** x, y : Objekt **gilt** $y \in \{x, y\}$;

In einem direkten Beweis des ersten Satzes gehen wir von x, y mit x, y : Objekt aus. Anwendung von Axiom (A13) auf x ergibt $x = x$ und (S11) angewendet auf $(x = x, x = y)$ ergibt $(x = x) \vee (x = y)$. Satz (S41) angewendet auf (x, y, x) mit anschließender Ersetzung führt auf $x \in \{x, y\}$ ■

Der direkte Beweis zu (S44) benutzt eine Anwendung von (S43) auf (y, x) mit dem Ergebnis $y \in \{y, x\}$. Anwendung von (S42) mit anschließender Ersetzung liefert das Ergebnis ■

Aufgabe 3.9. Beweisen Sie den Satz

$$\forall x \textbf{ mit } x \in \emptyset \textbf{ gilt } \text{wahr} = \text{falsch};$$

Aufgabe 3.10. Zeigen Sie

$$\forall A \textbf{ mit } A : \text{Menge} \textbf{ gilt } \emptyset \subset A;$$

und damit dann

$$\forall M \textbf{ mit } M : \text{Menge}; \neg\exists\text{Element}(M) \textbf{ gilt } M = \emptyset;$$

Aufgabe 3.11. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}&\text{Paarmenge}(x, y \textbf{ mit } x, y : \text{Objekt}) :=\\ &\quad \text{Beispielmenge}(u \textbf{ mit } (u = x) \vee (u = y) \square) \ldots : \text{Menge};\end{aligned}$$

wohldefiniert ist.

Aufgabe 3.12. Zeigen Sie das Lemma

$$\forall x, y \textbf{ mit } x, y : \text{Objekt} \textbf{ gilt } \{x, y\} \subset \{y, x\}$$

das zum Beweis von (S42) benötigt wird.

3.4 Mengenoperationen

Um Mengen zu beschreiben, die noch mehr Elemente haben können, greift man auf die Aktionsmöglichkeit der *Mengenvereinigung* zurück. Sie wirkt auf sogenannte *Mengenfamilien*, d.h. Mengen, deren Elemente selbst wieder Mengen sind.

$$\text{Mengenfamilie} := \mathcal{M} \textbf{ mit } \mathcal{M} : \text{Menge}; \text{Element}(\mathcal{M}) \sqsubset \text{Menge} \square;$$

Eine besonders einfache Mengenfamilie ist die leere Menge, wie in Aufgabe 3.13 gezeigt wird.

$$\text{(S45)} \quad \emptyset : \text{Mengenfamilie};$$

Dort sehen wir auch, dass jede Paarmenge $\{A, B\}$ einen Mengenfamilie ist, sofern A, B Mengen sind.

(S46) $\forall A, B$ **mit** A, B : Menge **gilt** $\{A, B\}$: Mengenfamilie;

Dass eine Vereinigungsmenge existiert, deren Elemente gerade die Elemente aller in einer Familie angegebenen Mengen sind, wird so formuliert:

(M6) $\forall \mathcal{M}$ **mit** $\mathcal{M}$: Mengenfamilie **gilt**
$(x$ **mit** $\exists U$ **mit** $U \in \mathcal{M}; x \in U \,\square\square)$: Elementbegriff;

Dieses Axiom erlaubt uns die Vereinigungsmengenzuordnung zu definieren, deren Ergebnis wir auch mit $\bigcup \mathcal{M}$ abkürzen.

Vereinigungsmenge($\mathcal{M}$ **mit** $\mathcal{M}$: Mengenfamilie) :=
Beispielmenge(x **mit** $\exists U$ **mit** $U \in \mathcal{M}; x \in U \,\square\square$) ... : Menge;

Zum Nachweis der Wohldefiniertheit nehmen wir an, dass eine Mengenfamile $\mathcal{M}$ gegeben ist. Anwendung von (M6) auf $\mathcal{M}$ zeigt, U : Elementbegriff mit $U := (x$ **mit** $\exists U$ **mit** $U \in \mathcal{M}; x \in U \,\square\square)$, so dass $Y :=$ Beispielmenge(U) gebildet werden kann und Y : Menge gilt ■

Zum praktischen Umgang mit Vereinigungsmengen ist der folgende Satz entscheidend

(S47) $\forall \mathcal{M}, a$ **mit** $\mathcal{M}$: Mengenfamilie **gilt**
$(a \in \bigcup \mathcal{M}) \Leftrightarrow \exists U$ **mit** $U \in \mathcal{M}; a \in U \,\square$;

In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass $\mathcal{M}, a$ gegeben sind, wobei $\mathcal{M}$: Mengenfamilie gilt. Anwendung von (M2) auf $\bigcup \mathcal{M}$ ergibt Element($\bigcup \mathcal{M}$) : Begriff. Anwendung von Axiom (A13) auf (a : Element($\bigcup \mathcal{M}$)) ergibt nun eine Gleichheitsaussage, bei der wir auf der linken Seite die Elementschreibweise benutzen, d.h. $(a \in \bigcup \mathcal{M}) = (a$: Element($\bigcup \mathcal{M}$)). Anwendung von (S30) auf $U := (x$ **mit** $\exists U$ **mit** $U \in \mathcal{M}; x \in U \,\square\square)$ ergibt Element($\bigcup \mathcal{M}$) $= U$, so dass wir durch Ersetzung $(a \in \bigcup \mathcal{M}) = (a : U)$ erhalten.

Definieren wir $V := \exists U$ **mit** $U \in \mathcal{M}; a \in U \,\square$, so zeigt ein direkter Beweis von $(a : U) \Rightarrow V$ unter der Annahme $a : U$ durch Expansion, dass V gilt ■ Umgekehrt folgt in einem direkten Beweis von $V \Rightarrow (a : U)$ unter der Annahme V nach Wahl eines Beispiels M, dass a : Element(M) gilt und somit eine ist-Aussage erfüllt. Damit können wir $a : U$ komprimieren ■ Anwendung von (S22) auf $(a : U, V)$ liefert $(a : U) \Leftrightarrow V$. Ersetzen wir damit in $(a \in \bigcup \mathcal{M}) = (a : U)$, so folgt die Behauptung ■

Nach Konstruktion hat $\bigcup\mathcal{M}$ alle Elemente der Familie $\mathcal{M}$ als Teilmengen, wie der folgende Satz belegt, der als Übungsaufgabe 3.14 gezeigt wird.

(S48) $\forall\mathcal{M}, M$ **mit** $\mathcal{M}$: Mengenfamilie; $M \in \mathcal{M}$ **gilt** $M \subset \bigcup\mathcal{M}$;

Ebenso kann man zeigen (Aufgabe 3.15), dass die Vereinigung der leeren Mengenfamilie nicht viel liefert:

(S49) $\bigcup\emptyset = \emptyset$;

Im Spezialfall von zwei Mengen A, B benutzt man oft auch

Paarmengenvereinigung(A, B **mit** A, B : Menge) := $\bigcup\{A, B\} \ldots$: Menge;

Wohldefiniertheit folgt durch Anwendung von (S46) auf (A, B), woraus ersichtlich ist, dass $\{A, B\}$ die Argumentbedingung von Vereinigungsmenge erfüllt. Damit ist $Y := \bigcup\{A, B\}$ korrekt gebildet und es gilt Y : Menge ■

Als Abkürzung für $\bigcup\{A, B\}$ schreibt man auch kurz $A\cup B$. Längere Vereinigungen der Form $(\{a, b\} \cup \{c\}) \cup \{d\}$ notiert man dabei kürzer in der Form $\{a, b, c, d\}$. Wichtig ist dabei der Satz

(S50) $\forall A, B, x$ **mit** A, B : Menge **gilt** $(x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$;

In einem direkten Beweis gehen wir von Objekten A, B, x aus und nehmen A, B : Menge an. Wenden wir (S46) auf (A, B) an und anschließend (S47) auf $(\{A, B\}, x)$, so folgt $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow V$ mit $V := \exists U$ **mit** $U \in \{A, B\}; x \in U$ □.

In einem direkten Beweis gehen wir nun davon aus, dass V gilt. Wahl eines Beispiels C ergibt nach Expansion $C \in \{A, B\}$ und $x \in C$. Mit (S41) angewendet auf (A, B, C) folgt nach Ersetzung in $C \in \{A, B\}$ eine oder-Aussage, auf der wir eine Fallunterscheidung machen. Im Fall $C = A$ gilt durch Ersetzung $x \in A$. Anwendung von (S11) auf $(x \in A, x \in B)$ ergibt $(x \in A) \vee (x \in B)$. Im Fall $C = B$ folgt durch Ersetzung $x \in B$ und Anwendung von (S12) auf $(x \in A, x \in B)$ ergibt wieder die gleiche Aussage ■ Umgekehrt nehmen wir nun in einem direkten Beweis an, dass $(x \in A) \vee (x \in B)$ gilt. Im Fall $x \in A$ wenden wir zunächst (S43) auf (A, B) an und komprimieren dann A : (U **mit** $U \in \{A, B\}; x \in U$ □). Damit gilt V. Im Fall $x \in B$ gehen wir ähnlich vor: Anwendung von (S44) und Kompression von B : (U **mit** $U \in \{A, B\}; x \in U$ □) liefert wieder V ■ Mit den beiden Implikationen können wir nun Satz (S22) auf $(V, (x \in A) \vee (x \in B))$ anwenden und erhalten die entsprechende Äquivalenz, mit der wir in $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow V$ zum gewünschten Ergebnis ersetzen ■

Eine weitere Möglichkeit, größere Mengen aus vorgegebenen Mengen herzustellen, ist das *kartesische Produkt*. Die Produktmenge zu zwei vorgegebenen Mengen A, B enthält dabei alle Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Dahinter steht das Axiom

(M7) $\forall A, B$ **mit** A, B : Menge **gilt**
$(a, b$ **mit** $a \in A; b \in B \; \Box)$: Elementbegriff;

Auch hier können wir eine mengenwertige Zuordnung definieren

kartesischesProdukt(A, B **mit** A, B : Menge) :=
Beispielmenge(a, b **mit** $a \in A; b \in B \; \Box$) ... : Menge;

wobei wir das Ergebnis auch mit $A \times B$ abkürzen. Der Beweis der Wohldefinition wird in Aufgabe 3.16 durchgeführt. Die charakterisierende Elementbedingung, wird durch zwei Lemmata aus dem Bereich der Logik vorbereiten.

(S51) $\forall E, F$ **mit** E, F :: Wahrheitswert; $E \wedge F$ **gilt** E;

In einem direkten Beweis gehen wir von zwei Objekten E, F aus, die die Voraussetzungen erfüllen. In einem Widerspruchsschritt gehen wir weiter davon aus, dass $\neg E$ gilt. Anwendung von (S26) auf E zeigt nun E = falsch. Expandieren wir F :: Wahrheitswert, dann folgt im Fall F = wahr durch zwei Ersetzungen in (falsch $\wedge$ wahr) = falsch die Aussage $(E \wedge F)$ = falsch. Gleichzeitig ergibt (A12) angewendet auf $E \wedge F$ auch $E \wedge F$ = wahr. Ersetzung liefert (wahr = falsch) $\lightning$ (S15) zur doppelten Verneinung angewendet auf E zeigt die Behauptung ■

(S52) $\forall E, F$ **mit** E, F :: Wahrheitswert; $E \wedge F$ **gilt** F;

In einem direkten Beweis gehen wir von zwei Objekten E, F aus, die die Voraussetzungen erfüllen. Anwendung von (S7) auf (F, E) erlaubt eine Ersetzung von $E \wedge F$ durch $F \wedge E$. Anwendung von (S51) auf (F, E) liefert die Behauptung ■

Nun kommen wir zur Charakterisierung der Elementbedingung.

(S53) $\forall A, B, a, b$ **mit** A, B : Menge **gilt**
$((a, b) \in A \times B) \Leftrightarrow ((a \in A) \wedge (b \in B))$;

Zum direkten Beweis von (S2) nehmen wir nun an, dass A, B, a, b vorliegen mit A, B : Menge. Mit $P := (x, y$ **mit** $x \in A; y \in B \,\square)$ ergibt (M7) angewendet auf (A, B) die Aussage P : Elementbegriff und Satz (S30) angewendet auf P zeigt Element$(A \times B) = P$. Anwendung von (A13) auf $(a, b) : P$ zeigt nach Ersetzung $((a, b) \in A \times B) = ((a, b) : P)$.

In einem direkten Beweis von $((a, b) : P) \Rightarrow ((a \in A) \wedge (b \in B))$ nehmen wir nun an, $(a, b) : P$ gilt. Expansion liefert dann $(a \in A)$ und $(b \in B)$. Mit einer Anwendung von (S51) auf diese beiden Aussagen folgt $(a \in A) \wedge (b \in B)$ ■ In einem direkten Beweis von $((a \in A) \wedge (b \in B)) \Rightarrow ((a, b) : P)$ gehen wir von der und-Aussage aus. Zunächst wenden wir (S51) und (S52) auf $(a \in A, b \in B)$ an und erhalten damit, dass die Einzelaussagen gelten. Mit (A22) angewendet auf (Element(A), Element(B), a, b) erhalten wir die Aussage $(a, b) : P$ ■ Anwendung von (S22) auf $((a, b) : P, (a \in A) \wedge (b \in B))$ ergibt nun eine Äquivalenz, die die Ersetzung in $((a, b) \in A \times B) = ((a, b) : P)$ zum gewünschten Ergebnis erlaubt ■

Neben der Vereinigung von vorgegebenen Mengen ist die *Potenzmengenbildung* eine weitere Operation, die zur Herstellung größerer Mengen dient. Dabei besteht die Potenzmenge einer Menge aus allen ihren Teilmengen:

(M8) $\forall A$ **mit** A : Menge **gilt** $(B$ **mit** B : Menge; $B \subset A \,\square)$: Elementbegriff;

Wie in den vorherigen Fällen nutzen wir auch hier das Axiom zur Definition einer Zuordnung

Pot$(A$ **mit** A : Menge) := Beispielmenge$(B$ **mit** B : Menge; $B \subset A \,\square)$ . . . : Menge;

Zum Nachweis der Wohldefinition nehmen wir an, dass eine Menge A gegeben ist. Anwendung von Axiom (M8) auf A zeigt dass $P := (B$ **mit** B : Menge; $B \subset A \,\square)$ ein Elementbegriff ist. Damit ist $Y :=$ Bildmenge(P) korrekt gebildet und Y : Menge gilt ■

Auch hier arbeiten wir die definierende Mengenbedingung wieder heraus.

(S54) $\forall A, x$ **mit** A : Menge **gilt**
$(x \in \text{Pot}(A)) \Leftrightarrow x : (B$ **mit** B : Menge; $B \subset A \,\square)$;

In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass A, x gegeben sind mit A : Menge. Wenden wir (M8) auf A an, so sehen wir, dass $P :=$ (B **mit** B : Menge; $B \subset A$ □) ein Elementbegriff ist und Satz (S30) angewendet auf P zeigt Element(Pot(A)) $= P$. Anwendung von (A13) auf $x : P$ zeigt nach Ersetzung $(x \in \text{Pot}(A)) = (x : P)$ ■

In Aufgabe 3.17 wird gezeigt, dass sowohl die leere Menge, als auch die Argumentmenge in der Potenzmenge enthalten sind.

(S55) $\forall A$ **mit** A : Menge **gilt** $\emptyset \in \text{Pot}(A)$;
(S56) $\forall A$ **mit** A : Menge **gilt** $A \in \text{Pot}(A)$;

Wählen wir zum Beispiel $A = \{\text{wahr, falsch}\}$, so kann man zeigen, dass

$$\text{Pot}(A) = \{\emptyset, \{\text{wahr}\}, \{\text{falsch}\}, \{\text{wahr, falsch}\}\}$$

gilt. Diese Menge hat also $4 = 2^2$ Elemente. Allgemein werden wir noch sehen, dass die Elementzahl der Potenzmenge einer endlichen Menge immer eine Zweierpotenz mit der Größe der ursprünglichen Menge im Exponenten ist.

Während die Mengenvereinigung und Potenzmengenbildung zu größern Mengen führen, dient der Prozess der *Aussonderung* zur gezielten Verkleinerung. Das entsprechende Axiom lautet

(M9) $\forall\, Y, Z$ **mit** Y : Elementbegriff; $Z \sqsubset Y$ **gilt** Z : Elementbegriff;

Dass ein Begriff $Z := x$ **mit** B □ spezieller als ein Elementbegriff Y ist, kann besonders leicht erkannt werden, wenn B die Forderung $x : Y$ umfasst. Als abkürzende Schreibweise vereinbaren wir $\{x$ **mit** $B\}$ für den deutlich längeren Ausdruck Beispielmenge(x **mit** B □). Wenn B *keine* Bedingung $x : Y$ mit einer Menge Y enthält, ist die Abkürzung nur dann zulässig, wenn im Anschluss ein Wohldefiniertheitsbeweis geführt wird, in dem gezeigt wird, dass die angegebene Bedingung einen Elementbegriff erzeugt. Eine Abkürzung für den Begriff x **mit** B □ erhält man mit Element($\{x$ **mit** $B\}$).

Wichtiges Beispiel einer Aussonderung ist die Schnittmenge einer Familie $\mathcal{M}$

Schnitt($\mathcal{M}$ **mit** $\mathcal{M}$: Mengenfamilie) :=
  $\{x$ **mit** $x \in \bigcup \mathcal{M}$; $\forall U$ **mit** $U \in \mathcal{M}$ **gilt** $x \in U\}$;

Da die Mengenbedingung die Forderung $x \in \bigcup \mathcal{M}$ umfasst, muss hier vereinbarungsgemäß kein Wohldefiniertheitsbeweis geführt werden. Anstelle des Ausdrucks Schnitt($\mathcal{M}$) schreiben wir auch kurz $\bigcap \mathcal{M}$. Kommen wir nun zu der Charakterisierung der Schnittmenge.

(S57) $(\bigcap\emptyset) = \emptyset$;
(S58) $\forall \mathcal{M}, x$ **mit** $\mathcal{M}$: Mengenfamilie; $\mathcal{M}$: nichtleer **gilt**
$(x \in \bigcap\mathcal{M}) \Leftrightarrow \forall U$ **mit** $U \in \mathcal{M}$ **gilt** $x \in U$;

Wir beginnen mit dem Beweis von (S57). Zum Nachweis von $(\bigcap\emptyset) \subset \emptyset$ nehmen wir in einem direkten Beweis an, dass ein Element von $\bigcap\emptyset$ gegeben ist. Expansion von x : Element$(\bigcap\emptyset)$ ergibt $x \in \bigcup\emptyset$ bzw. nach Ersetzung $x \in \emptyset$ ▪ Die umgekehrte Inklusion folgt mit (S39) angewendet auf $\bigcap\emptyset$. Mengengleichheit ergibt sich nun durch Anwendung von (S34) auf $(\bigcap\emptyset, \emptyset)$.

Zum direkten Beweis von (S58) nehmen wir an, dass $\mathcal{M}, x$ vorliegen mit $\mathcal{M}$: Mengenfamilie und $\mathcal{M}$: nichtleer. Zur Abkürzung setzen wir $P :=$ Element$(\bigcap\mathcal{M})$. Anwendung von (M2) auf $\bigcap\mathcal{M}$ ergibt zunächst P : Begriff, so dass die Anwendung von Axiom (A13) auf $x : P$ die Gleichheitsaussage $(x \in \bigcap\mathcal{M}) = (x : P)$ führt.

Definieren wir $V := \forall U$ **mit** $U \in \mathcal{M}$ **gilt** $x \in U$, so zeigt ein direkter Beweis von $(x : P) \Rightarrow V$ unter der Annahme $x : P$ durch Expansion, dass V gilt ▪ In einem direkten Beweis von $V \Rightarrow (x : P)$ unter der Annahme V expandieren wir zunächst $\mathcal{M}$: nichtleer und wählen dann ein Beispiel M von $\mathcal{M}$. Anwendung von V auf M ergibt $x \in M$ und Anwendung von (S48) auf M zeigt $M \subset \bigcup\mathcal{M}$. Wendet man diesen Satz wiederum auf x an, so folgt $x \in \bigcup\mathcal{M}$ und wir können $x : P$ komprimieren ▪ Anwendung von (S22) auf $(x : P, V)$ liefert $(x : P) \Leftrightarrow V$. Ersetzen wir damit in $(x \in \bigcap\mathcal{M}) = (x : P)$, so folgt die Behauptung ▪

Wieder führen wir für die Mengenfamilie $\{A, B\}$ eine spezielle Form der Schnittmenge ein.

Paarmengenschnitt$(A, B$ **mit** A, B : Menge$) := \bigcap\{A, B\} \ldots$: Menge;

Wohldefiniertheit folgt durch Anwendung von (S46) auf (A, B), woraus ersichtlich ist, dass $\{A, B\}$ die Argumentbedingung von Schnitt erfüllt. Damit ist $Y := \bigcap\{A, B\}$ korrekt gebildet und es gilt Y : Menge ▪

Als Abkürzung für das Zuordnungsergebnis wählen wir $A \cap B$ und zeigen zur Charakterisierung der Elementbedingung den Satz

(S59) $\forall A, B, x$ **mit** A, B : Menge **gilt** $(x \in (A \cap B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$;

In einem direkten Beweis gehen wir von Objekten A, B, x aus und nehmen A, B : Menge an. Wenden wir (S46) auf (A, B) an, so folgt $\{A, B\}$: Mengenfamilie. Außerdem gilt $A, B \in \{A, B\}$ wegen (S43) und (S44) angewendet auf (A, B), so dass auch $\exists$Element$(\{A, B\})$ gilt und wir $\{A, B\}$: nichtleer komprimieren können. Anwendung der Charakterisierung (S58) auf $(\{A, B\}, x)$ ergibt $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow V$ mit $V := \forall U$ **mit** $U \in \{A, B\}$ **gilt** $x \in U$.

In einem direkten Beweis gehen wir nun davon aus, dass V gilt. Anwendung von V auf A und B ergibt $x \in A$ und $x \in B$, so dass (S2) auf $(x \in A) \wedge (x \in B)$ führt ∎ Umgekehrt nehmen wir nun in einem direkten Beweis an, dass $(x \in A) \wedge (x \in B)$ gilt. Wenden wir (S51) und (S52) auf $(x \in A, x \in B)$ an, so folgt $x \in A$ und $x \in B$. Zum Nachweis von V nehmen wir nun an, ein Element U von $\{A, B\}$ sei gegeben. Durch Ersetzung mit der Äquivalenz, die aus der Anwendung von (S41) auf (A, B, U) folgt, wissen wir, dass $(U = A) \vee (U = B)$ gilt. In jedem der beiden resultierenden Fälle können wir nun durch Ersetzung auf $x \in U$ schließen ∎ Damit gilt V ∎ Mit den beiden Implikationen können wir nun Satz (S22) auf $(V, (x \in A) \wedge (x \in B))$ anwenden und erhalten die entsprechende Äquivalenz, mit der wir in $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow V$ zum gewünschten Ergebnis ersetzen ∎

Aufgabe 3.13. Zeigen Sie $\emptyset$: Mengenfamilie und

$\forall A, B$ **mit** A, B : Menge **gilt** $\{A, B\}$: Mengenfamilie;

Aufgabe 3.14. Zeigen Sie

$\forall \mathcal{M}, M$ **mit** $\mathcal{M}$: Mengenfamilie; $M \in \mathcal{M}$ **gilt** $M \subset \bigcup \mathcal{M}$;

Aufgabe 3.15. Beweisen Sie die Aussage $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

Aufgabe 3.16. Zeigen Sie die Wohldefiniertheit von

kartesischesProdukt$(A, B$ **mit** A, B : Menge$)$:=
  Beispielmenge$(a, b$ **mit** $a \in A; b \in B$ □$)$ . . . : Menge;

Aufgabe 3.17. Zeigen Sie

$\forall A$ **mit** A : Menge **gilt** $\emptyset \in$ Pot(A);
$\forall A$ **mit** A : Menge **gilt** $A \in$ Pot(A);

Formulieren und beweisen Sie die Aussage, dass Potenzmengen nie leer sind.

Aufgabe 3.18. Formulieren Sie die Sätze, dass für jede Menge A gilt $A \cap A = A$ und $A \cup A = A$ und beweisen Sie sie.

3.5 Funktionen

Im Modell der Mengenlehre spielen Zuordnungen eine besondere Rolle, deren Argumente und Ergebnisse Elemente von Mengen sind. Bevor wir uns diesen speziellen Zuordnungen genauer zuwenden, soll erst der Begriff der *Abbildung* zwischen zwei Begriffen A, B eingeführt werden. Wir definieren

Abbildung(A, B **mit** A, B :: Begriff) := F **mit**
  F :: Zuordnung; Argument(F) $= A$; $\forall x$ **mit** $x : A$ **gilt** $F(x) : B$ □;

Wenn A, B sogar A, B : Begriff erfüllen, dann besagt ein Grundaxiom, dass jedes F was die Bedingung von Abbildung(A, B) erfüllt, eine Zuordnung *ist*. Genauer folgt mit Axiom (A21)

(S60) $\forall F, A, B$ **mit** A, B : Begriff; F :: Abbildung(A, B) **gilt** F : Zuordnung;

Umgekehrt *sind* Argument(F) und

Ergebnis(F **mit** F :: Zuordnung) :=
  y **mit** $\exists x$ **mit** x : Argument(F); $y = F(x)$ □ □;

Begriffe, wenn F eine Zuordnung ist, d.h.

(S61) $\forall F$ **mit** F : Zuordnung **gilt** Argument(F) : Begriff;
(S62) $\forall F$ **mit** F : Zuordnung **gilt** Ergebnis(F) : Begriff;

Eine Abbildung, die den Elementen einer Menge Objekte zuordnet, nennen wir eine *Funktion*. Genauer definieren wir

Funktion := F **mit**
  $\exists A$ **mit** A : Menge; F :: Abbildung(Element(A), Objekt) □ □;

Dann besagt ein Mengenaxiom, dass Ergebnis(F) für jede Funktion F ein Elementbegriff ist.

(M10) $\forall F$ **mit** F :: Funktion **gilt** Ergebnis(F) : Elementbegriff;

Insgesamt kommen wir damit zu unserem ersten Resultat

(S63) $\forall F$ **mit** F :: Funktion **gilt** F : Funktion;

In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass F gegeben ist mit F :: Funktion. Expansion dieser Aussage liefert eine Existenzaussage, die wir zur Wahl eines Beispiels M nutzen. Expansion der entsprechenden ist-Aussage liefert uns M : Menge und mit der Abkürzung $A := \mathrm{Element}(M)$ auch F :: Abbildung(A, Objekt). Expansion dieser Aussage ergibt F :: Zuordnung und $\mathrm{Argument}(F) = A$. Außerdem gilt der Satz $S := \forall x$ **mit** $x : A$ **gilt** $F(x)$: Objekt.

Wenden wir (M2) auf M an, dann finden wir A : Begriff. Mit der Abkürzung $B := \mathrm{Ergebnis}(F)$ zeigt (M10) angewendet auf F, dass B : Elementbegriff gilt. Anwendung von Elementbegriff $\sqsubset$ Begriff auf B führt dann zu B : Begriff. Als nächstes zeigen wir den Satz $\forall x$ **mit** $x : A$ **gilt** $F(x) : B$ mit einem direkten Beweis. Sei dazu x gegeben und es gelte $x : A$, bzw. nach Ersetzung $x : \mathrm{Argument}(F)$. Anwendung von Satz S auf x ergibt $F(x)$: Objekt. Wegen $x : (u$ **mit** $u : \mathrm{Argument}(F);\ F(x) = F(u)\ \square)$ existiert ein Beispiel des Begriffs und wir können $F(x) : \mathrm{Ergebnis}(F)$ komprimieren. Da B eine Abkürzung für $\mathrm{Ergebnis}(F)$ ist, haben wir das Ziel erreicht ■

Im nächsten Schritt komprimieren wir F :: Abbildung(A, B) und durch Anwendung von (S60) auf F, A, B finden wir die gewünschte Aussage ■

Ist F eine Funktion, dann nennen wir die Mengen zu den Begriffen $\mathrm{Argument}(F)$ bzw. $\mathrm{Ergebnis}(F)$ auch die *Definitions-* bzw. *Bildmenge* von F

Def(F **mit** F :: Funktion) := Beispielmenge(Argument(F)) ...: Menge;
Bild(F **mit** F :: Funktion) := Beispielmenge(Ergebnis(F)) ...: Menge;

Der Nachweis der Wohldefinition wird in Aufgabe 3.19 geführt. Eine Charakterisierung der Definitions- und Bildelemente liefern die folgenden Sätze, die in Aufgabe 3.20 gezeigt werden.

(S64) $\forall F, x$ **mit** F :: Funktion **gilt** $(x \in \mathrm{Def}(F)) \Leftrightarrow (x : \mathrm{Argument}(F))$;
(S65) $\forall F, y$ **mit** F :: Funktion **gilt**
$(y \in \mathrm{Bild}(F)) \Leftrightarrow \exists x$ **mit** $x : \mathrm{Argument}(F);\ y = F(x)\ \square$;

Die Abkürzung $\{Y | x$ **mit** $B\} \ldots \subset C$ wird für die Bildmenge der Funktionen (x **mit** $B) \mapsto Y \ldots : \mathrm{Element}(C)$ benutzt. Bei Verwendung der Abkürzung wird ein Beweis der Wohldefinition benötigt, falls dies für $\{x$ **mit** $B\}$ nötig ist, falls $Y \in C$ nicht bereits aus den Regeln folgt, oder falls C : Menge nicht bereits gilt. Möchte man beispielsweise allen Teilmengen einer Menge M ein Objekt x als Element hinzufügen, so hat die entstehende Mengenfamilie die Form

$\{A \cup \{x\} \mid A$ **mit** $A \in \mathrm{Pot}(M)\} \ldots \subset (M \cup \{x\})$

Die Funktion ist hier $(A\ \mathbf{mit}\ A \in \mathrm{Pot}(M)) \mapsto A \cup \{x\} \ldots : \mathrm{Element}(M \cup \{x\})$.

Schon aus der Schule ist uns bekannt, dass man den Zusammenhang zwischen Argument und Ergebnis, den eine Funktion beschreibt, durch die Menge aller Paare $(x, F(x))$ darstellen kann, indem man sie als Punkte in einem ebenen Koordinatensystem einträgt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom *Graph* einer Funktion

$$\begin{aligned}&\mathrm{Graph}(F\ \mathbf{mit}\ F :: \mathrm{Funktion}) :=\\ &\quad \{(x, y)\ \mathbf{mit}\ x : \mathrm{Argument}(F);\ y = F(x)\} \ldots : \mathrm{Menge};\end{aligned}$$

Zum Nachweis der Wohldefinition müssen wir zeigen, dass bei vorliegender Funktion F, der Begriff $G := x, y\ \mathbf{mit}\ x : \mathrm{Argument}(F);\ y = F(x)\ \square$ ein Elementbegriff ist. Mit der Abkürzung $P := \mathrm{Def}(F) \times \mathrm{Bild}(F)$ zeigen wir dazu $G \sqsubset \mathrm{Element}(P)$ in einem direkten Beweis. Sei u dazu ein Objekt mit $u : G$. Expansion, gefolgt von der Definition $(a, b) := u$, liefert die Aussagen $a : \mathrm{Argument}(F)$ und $b = F(a)$, so dass sich $a : (x\ \mathbf{mit}\ x : \mathrm{Argument}(F);\ b = F(x)\ \square)$ kondensieren lässt. In der resultierenden Existenzaussage ersetzen wir mit der Äquivalenz, die aus (S65) angewendet auf (F, b) folgt und erhalten $b \in \mathrm{Bild}(F)$. Entsprechend lässt sich mit der Äquivalenz, die aus (S64) angewendet auf (F, a) folgt, auch $a \in \mathrm{Def}(F)$ ersetzen. Vereinigen wir die beiden Teilaussagen $(a \in \mathrm{Def}(F),\ b \in \mathrm{Bild}(F))$ mit (S2) zu einer und-Aussage, dann kann man mit der Äquivalenz, die aus Anwendung von (S53) auf $(\mathrm{Def}(F), \mathrm{Bild}(F), a, b)$ folgt, auch $u \in P$ schließen $\square$

Für $E := \mathrm{Element}(P)$ gilt mit (S28) angewendet auf P die Aussage E : Elementbegriff. Anwendung von (M9) auf (E, G) zeigt nun G : Elementbegriff sowie $\mathrm{Beispielmenge}(G)$: Menge ■

Im Beweis der Wohldefinition ist ein Teilergebnis versteckt, das wir hier noch einmal hervorheben wollen. Die etwas umständliche Argumentation wollen wir dabei durch Rückgriff auf zwei Lemmata verbessern, die in Aufgabe 3.24 bewiesen werden.

(S66) $\forall F, a, b\ \mathbf{mit}\ F : \mathrm{Funktion};\ a : \mathrm{Argument}(F);\ b = F(a)\ \mathbf{gilt}\ b \in \mathrm{Bild}(F);$
(S67) $\forall A, B, a, b\ \mathbf{mit}\ A, B : \mathrm{Menge};\ a \in A; b \in B\ \mathbf{gilt}\ (a, b) \in A \times B;$

Das hervorzuhebende Teilergebnis über die Graphmenge lautet nun

(S68) $\forall F\ \mathbf{mit}\ F :: \mathrm{Funktion}\ \mathbf{gilt}\ \mathrm{Graph}(F) \subset \mathrm{Def}(F) \times \mathrm{Bild}(F);$

In einem direkten Beweis gehen wir davon aus, dass eine Funktion F vorliegt. Mit der Abkürzung $P :=$ Def(F)$\times$Bild(F) zeigen wir in einem weiteren direkten Beweis, dass Graph(F) $\subset P$ gilt. Dazu nehmen wir an, dass für ein Objekt u die Aussage $u \in$ Graph(F) gilt. Expansion dieser Aussage mit anschließender Definition von $(a, b) := u$ ergibt die Aussagen a : Argument(F) und $b = F(a)$, so dass mit (S66) angewendet auf (F, a, b) die Aussage $b \in$ Bild(F) folgt. Mit der Äquivalenz, die aus (S64) angewendet auf (F, a) folgt, ersetzen wir a : Argument(F) zu $a \in$ Def(F). Weiter folgt mit (S67) angewendet auf (Def(F), Bild(F), a, b) das Ergebnis $u \in P$ ■ Damit schließt auch der gesamte Beweis ■

Die Besonderheit der Menge Graph(F) als Teilmenge von Def(F)$\times$Bild(F) besteht darin, dass es für jedes Element a aus der Definitionsmenge von F *genau ein* Paar (a, b) in Graph(F) gibt.

(S69) $\forall F, a$ **mit** F : Funktion; a : Argument(F) **gilt**
$\exists! b$ **mit** $(a, b) \in$ Graph(F) $\square$;

In einem direkten Beweis gehen wir davon aus, dass F, a mit den angegebenen Eigenschaften vorliegen. Wir definieren $b := F(a)$ und können dann $(a, b) \in$ Graph(F) komprimieren. Setzen wir $U := b$ **mit** $(a, b) \in$ Graph(F) $\square$, dann folgt auch $b : U$ und somit $\exists U$ durch Kompression. Zum Nachweis von $!U$ nehmen wir in einem direkten Beweis an, dass u, v gegeben sind mit $u, v : U$. Expansion dieser Aussagen ergibt $(a, u), (a, v) \in$ Graph(F). Expansion dieser Aussagen ergibt wiederum $u = F(a)$ und $v = F(a)$ woraus sich $u = v$ durch Ersetzung ergibt ■ Nun lässt sich $\exists! U$ komprimieren ■

Im Folgenden nennen wir Mengen mit den beiden gezeigten Eigenschaften *Graphenmengen*. Genauer setzen wir

Graphenmenge := Γ **mit** Γ : Menge; $\exists A, B$ **mit** A, B : Menge; $\Gamma \subset A \times B$;
$\forall a$ **mit** $a \in A$ **gilt** $\exists! b$ **mit** $(a, b) \in \Gamma$ $\square$ $\square$;

In einem kurzen Beweis sieht man, dass jede Graphenmenge eine Menge ist, d.h.

(S70) Graphenmenge $\sqsubset$ Menge;

In einem direkten Beweis gehen wir von Γ : Graphenmenge aus. Expansion liefert Γ : Menge ■

Außerdem lassen sich die beiden vorangegangenen Ergebnisse in knapper Form zusammenfassen.

(S71) $\forall F$ **mit** F :: Funktion **gilt** Graph(F) : Graphenmenge;

In einem direkten Beweis sei eine Funktion F gegeben. Wir definieren $\Gamma :=$ Graph(F). Anwendung von (S68) und (S69) erlaubt uns, (Def(F), Bild(F)): (A, B) **mit** A, B : Menge; $\Gamma \subset A \times B$; $\forall a$ **mit** $a \in A$ **gilt** $\exists! b$ **mit** $(a, b) \in \Gamma$ □ □ zu komprimieren, woraus auch die Existenz folgt. Dies erlaubt wiederum die Kompression von Γ : Graphenmenge ▪

Umgekehrt kann man zu jeder Graphenmenge Γ genau eine Funktion konstruieren, die Γ als ihren Graphen hat. Zur Vorbereitung zeigen wir zunächst, dass man jeder Graphenmenge die Menge ihrer ersten Komponenten zuordnen kann.

Definitionsbereich(Γ mit Γ : Graphenmenge) :=
$\{a$ **mit** $\exists b$ **mit** $(a, b) \in \Gamma$ □$\}$ ... : Menge;

Zum Nachweis der Wohldefinition gehen wir von einer Graphenmenge Γ aus. Expansion von Γ : Graphenmenge zeigt Γ : Menge und erlaubt uns, zwei Mengen A, B zu wählen, für die $\Gamma \subset A \times B$ und $\forall a$ **mit** $a \in A$ **gilt** $\exists! b$ **mit** $(a, b) \in \Gamma$ □ gilt. Mit der Abkürzung $U := a$ **mit** $\exists b$ **mit** $(a, b) \in \Gamma$ □ zeigen wir nun in einem direkten Beweis, dass $U \sqsubset$ Element(A) gilt. Dazu gehen wir von u mit $u : U$ aus. Expansion liefert eine Existenzaussage, die wir zur Wahl eines Objekts v mit den Eigenschaften $(u, v) \in \Gamma$ nutzen. Anwendung von $\Gamma \subset A \times B$ zeigt $(u, v) \in A \times B$. Mit der Äquivalenz, die aus der Anwendung von (S53) auf (A, B, u, v) folgt, erreichen wir durch Ersetzung $(u \in A) \wedge (v \in B)$. Mit (S51) angewendet auf die beiden Teilaussagen folgt u : Element(A) ▪

Eine Anwendung von (S28) auf A ergibt Element(A) : Elementbegriff, so dass wir (M9) mit (Element(A), U) anwenden können und U : Elementbegriff erhalten. Damit ist $Y :=$ Beispielmenge(U) korrekt gebildet und erfüllt Y : Menge ▪

Da nun Zugriff auf den Definitionsbereich besteht, können wir die Funktion zu einer Graphenmenge leicht beschreiben

FunktionZu(Γ **mit** Γ : Graphenmenge) :=
(a **mit** $a \in$ Definitionsbereich(Γ)) $\mapsto \downarrow b$ **mit** $(a, b) \in \Gamma$ □ ...: Funktion;

Zum Nachweis der Wohldefinition nehmen wir an, dass Γ mit Γ : Graphenmenge gegeben ist. Zur Abkürzung definieren wir $D :=$ Definitionsbereich(Γ) und

$$H(a \textbf{ mit } a \in D) :=\downarrow b \textbf{ mit } (a, b) \in \Gamma \; \square \ldots : \text{Objekt};$$

dessen Wohldefiniertheit wir ebenfalls zeigen müssen. Sei dazu a gegeben mit $a \in D$. Expansion von $a \in D$ zeigt $\exists U$ mit der Abkürzung $U := b$ **mit** $(a, b) \in \Gamma \; \square$. Wir expandieren Γ : Graphenmenge, und erhalten insbesondere eine Existenzaussage, die uns erlaubt zwei Mengen A, B mit den Eigenschaften $\Gamma \subset A \times B$ und $\forall a$ **mit** $a \in A$ **gilt** $\exists! b$ **mit** $(a, b) \in \Gamma \; \square$ zu wählen. Wegen $\exists U$ können wir ein Objekt u mit $u : U$ wählen. Expansion dieser Aussage zeigt dann $(a, u) \in \Gamma$. Wenden wir die Satzaussage $\Gamma \subset A \times B$ auf (a, u) an, dann ergibt sich $(a, u) \in A \times B$. Anwendung von (S53) auf (A, B, a, u) erlaubt uns die Ersetzung zu $(a \in A) \wedge (u \in B)$ und mit (S51) erhalten wir daraus $a \in A$. Wenden wir nun die Satzaussage, die aus dem Expansionsschritt resultierte, auf a an, dann finden wir $\exists! U$. Damit gilt für $Y :=\downarrow U$ die Aussage $Y : U$, woraus wir durch Kompression Y : Objekt folgern können ■

Durch Anwendung des ersten Satzes aus Aufgabe 3.7 auf D folgt, dass (x **mit** $x \in D \; \square$) = Element(D) gilt. Somit ist Argument(H) = Element(D). Insbesondere können wir nun die Satzaussage $\forall x$ **mit** x : Element(D) **gilt** $H(x)$: Objekt durch einen direkten Beweis leicht zeigen, da für jedes x mit x : Element(D) zunächst durch Ersetzung x : Argument(H) folgt und somit $H(x)$: Objekt gilt ■

Wir können somit H :: Abbildung(Element(D), Objekt) komprimieren und folglich auch D : (M **mit** M : Menge; H :: Abbildung(Element(M), Objekt). Die daraus folgende Existenzaussage ermöglicht uns H :: Funktion zu komprimieren. Anwendung von (S63) auf H zeigt dann H : Funktion ■

Unser Hauptziel ist der Nachweis, dass *FunktionZu* und *Graph* invers zueinander sind. Wir beginnen mit einem Lemma, das eine Überlegung aus dem Beweis der Wohldefinition aufgreift.

(S72) $\forall \Gamma$ **mit** Γ : Graphenmenge **gilt**
Def(FunktionZu(Γ)) = Definitionsbereich(Γ);

In einem direkten Beweis gehen wir von einer Graphenmenge Γ aus. Zur Abkürzung definieren wir $F :=$ FunktionZu(Γ), $A :=$ Def(F) und $D :=$ Definitionsbereich(Γ). Zum Nachweis des Satzes $\forall x$ **mit** x :: Objekt **gilt** $x \in$

Def(F) $\Leftrightarrow x \in D$ benutzen wir einen direkten Beweis. Dazu sei x gegeben. Anwendung von (S64) auf (F, x) ergibt die Äquivalenz $(x \in \text{Def}(F)) \Leftrightarrow (x : \text{Argument}(F))$. Die Implikation $(x : \text{Argument}(F)) \Rightarrow (x \in D)$ zeigen wir in einem direkten Beweis durch Expansion von $x : \text{Argument}(F)$ ∎ Die Implikation $(x \in D) \Rightarrow (x : \text{Argument}(F))$ zeigen wir ebenfalls in einem direkten Beweis durch Kompression von $x : \text{Argument}(F)$ ∎ Anwendung von (S22) auf die beiden Implikationen ergibt eine Äquivalenz, die uns durch Ersetzung das gewünschte Ergebnis liefert ∎ Nun müssen wir nur noch den Satz aus Aufgabe 3.8 auf (Def(F), D) anwenden ∎

(S73) $\forall \Gamma$ **mit** Γ : Graphenmenge **gilt** Graph(FunktionZu(Γ)) $= \Gamma$;

In einem direkten Beweis gehen wir von einer Graphenmenge Γ aus. Zur Abkürzung definieren wir $F :=$ FunktionZu(Γ) und $G :=$ Graph(F). Zum Nachweis von $G \subset \Gamma$ benutzen wir einen direkten Beweis. Sei dazu u gegeben mit $u \in G$. Expansion von $u \in G$ ergibt mit der Definition $(x, y) := u$ die Aussagen $x : \text{Argument}(F)$ und $y = F(x)$. Außerdem gilt wegen $F(x) =\downarrow b$ **mit** $(x, b) \in \Gamma$ □ auch $y : (b$ **mit** $(x, b) \in \Gamma$ □), so dass eine Expansion $(x, y) \in \Gamma$ liefert ∎

Zum Nachweis von $\Gamma \subset G$ gehen wir in einem direkten Beweis von einem Objekt u aus, das $u \in \Gamma$ erfüllt. Expansion von Γ : Graphenmenge liefert eine Existenzaussage, die uns die Wahl von zwei Mengen A, B erlaubt, mit den weiteren Eigenschaften, dass $\Gamma \subset A \times B$ und $T := \forall a$ **mit** $a \in A$ **gilt** $\exists! b$ **mit** $(a, b) \in \Gamma$ □ gelten. Wenden wir $\Gamma \subset A \times B$ auf u an, so folgt $u \in A \times B$. Eine Anwendung von (M7) auf (A, B) zeigt, dass $U := (a, b$ **mit** $a \in A; b \in B)$ ein Elementbegriff ist. Mit Satz (S30) angewendet auf B ergibt sich dann eine Gleichheit, die uns erlaubt von $u : \text{Element}(A \times B)$ auf $u : U$ zu ersetzen. Expandieren wir diese Aussage und definieren anschließend $(x, y) := u$, so finden wir $x \in A$.

Definieren wir $V := (b$ **mit** $(x, b) \in \Gamma$ □), so können wir $y : V$ komprimieren und erhalten damit $\exists V$, was uns wiederum erlaubt $x \in$ Definitionsbereich(Γ) zu schließen. Anwendung von (S72) auf Γ ergibt eine Gleichheit, die uns erlaubt auf $x \in \text{Def}(F)$ zu schließen und mit Anwendung von (S64) auf (F, x) ergibt sich eine Äquivalenz, mit der wir zu $x : \text{Argument}(F)$ ersetzen können. Wegen $F(x) =\downarrow V$ folgt schließlich $F(x) : V$.

Satz T angewendet auf x liefert andererseits $\exists! V$. Expandieren wir diese Aussage, so folgt insbesondere $!V$. Wenden wir diesen Satz auf $(y, F(x))$ an , so ergibt sich $y = F(x)$. Nun können wir $(x, y) \in G$ komprimieren ▪

Der Beweis schließt mit der Anwendung von (S34) auf (G, Γ) ▪

Zum Nachweis der umgekehrten Inversionseigenschaft zeigen wir zunächst den Satz

(S74) $\forall F, G$ **mit** F, G : Funktion; Graph(F) = Graph(G) **gilt** $F = G$;

Wir beginnen mit einem Hilfsatz der unter den gleichen Voraussetzungen Argument(F) $\sqsubset$ Argument(G) impliziert. In einem direkten Beweis nehmen wir dazu an, dass F, G mit den angegebenen Eigenschaften vorliegen. In einem direkten Beweis von Argument(F) $\sqsubset$ Argument(G) sei x : Argument(F) vorgegeben. Mit $y := F(x)$ können wir $(x, y) \in$ Graph(F) komprimieren. Ersetzung liefert dann auch $(x, y) \in$ Graph(G) und Expansion zeigt x : Argument(G) ▪

Im Hauptbeweis nehmen wir ebenfalls an, dass F, G mit den angegebenen Eigenschaften vorliegen. Anwendung des Hilfsatzes auf (F, G) und (G, F) zeigt zwei Inklusionen, woraus sich mit (A14) die Gleichheit der Argumentbegriffe ergibt. In einem direkten Beweis des Satzes $S := \forall x$ **mit** x : Argument(F) **gilt** $F(x) = G(x)$ nehmen wir nun an, dass x : Argument(F) gilt. Mit $y := F(x)$ lässt sich $(x, y) \in$ Graph(F) komprimieren. Ersetzung der Graphmenge und anschließende Expansion zeigt $y = G(x)$. Ersetzung liefert $F(x) = G(x)$ ▪ Mit Axiom (A15) angewendet auf (F, G) folgt nun $F = G$ ▪

Nun sind wir in der Lage, die zweite Inversionseigenschaft nachzuweisen.

(S75) $\forall F$ **mit** F : Funktion **gilt** FunktionZu(Graph(F)) = F;

In einem direkten Beweis gehen wir von einer Funktion F aus und definieren $\Gamma :=$ Graph(F) und $G :=$ FunktionZu(Γ). Anwendung von (S71) auf F ergibt Γ : Graphenmenge, so dass wir (S73) auf Γ anwenden können. Dies liefert Graph(FunktionZu(Γ)) = Γ. Wenden wir nun (S74) an auf (FunktionZu(Γ), F), so folgt die gewünschte Gleichheit ▪

Betrachten wir nun alle Graphenmengen, die Teilmengen von $A \times B$ sind und A als Definitionsbereich haben, dann ergibt sich die Menge

Graphen(A, B **mit** A, B : Menge) :=
  {Γ **mit** $\Gamma \in$ Pot($A \times B$); Γ : Graphenmenge; Definitionsbereich(Γ) = A};

Die zugehörigen Funktionen bilden dann ebenfalls eine Menge, die wir mit $\mathcal{F}(A, B)$ bezeichnen

$$\mathcal{F}(A, B \textbf{ mit } A, B : \text{Menge}) := \{\text{FunktionZu}(\Gamma) \mid \Gamma \textbf{ mit } \Gamma \in \text{Graphen}(A, B)\};$$

Zum Nachweis der Wohldefinition nehmen wir an, zwei Mengen A, B sind gegeben. Zur Abkürzung setzen wir $G := \text{Graphen}(A, B)$ und zeigen, dass

$$H(\Gamma \textbf{ mit } \Gamma \in G) := \text{FunktionZu}(\Gamma) \ldots : \text{Funktion};$$

eine Funktion ist. Zunächst gilt $H :: \text{Zuordnung}$ und $\text{Argument}(H) = (\Gamma \textbf{ mit } \Gamma \in G \,\square)$. Mit dem Satz aus Aufgabe 3.7 angewendet auf G folgt nach Ersetzung $\text{Argument}(H) = \text{Element}(G)$. Den Satz $\forall x \textbf{ mit } x : \text{Element}(G) \textbf{ gilt } H(x) : \text{Objekt}$ zeigen wir durch einen direkten Beweis. Wir nehmen dazu an, x ist gegeben mit $x : \text{Element}(G)$. Durch Ersetzung finden wir, dass $x : \text{Argument}(H)$ gilt und damit $H(x) : \text{Funktion}$. Damit lässt sich $H(x) : \text{Objekt}$ komprimieren ∎

Im nächsten Schritt können wir $H :: \text{Abbildung}(\text{Element}(G), \text{Objekt})$ komprimieren und damit $G : (M \textbf{ mit } M : \text{Menge};\ H :: \text{Abbildung}(\text{Element}(M), \text{Objekt}) \,\square)$, so dass wegen der Existenz auch $H :: \text{Funktion}$ komprimierbar ist. Damit ist $Y := \text{Bild}(H)$ eine Menge.

Man nennt $\mathcal{F}(A, B)$ auch die *Menge aller Funktionen von A nach B*. Als Infix-Abkürzung von $\text{Element}(\mathcal{F}(A, B))$ benutzen wir $A \to B$. Wenn F eine Funktion von A nach B ist, d.h. wenn $F : (A \to B)$ gilt, so wissen wir

(S76) $\forall A, B \textbf{ mit } A, B : \text{Menge}; \textbf{ gilt } (A \to B) = (F \textbf{ mit } F : \text{Funktion}; \text{Def}(F) = A; \text{Bild}(F) \subset B \,\square);$

Für Funktionsdefinitionen benutzt man häufig eine Abkürzung der Form

$$F := \begin{cases} A & \to & B \\ x & \mapsto & y \end{cases}$$

wobei dies für $F(x \textbf{ mit } x \in A) := y \ldots : \text{Element}(B)$ steht. Der Wohldefiniertheitsbeweis verlangt dabei, dass für jedes Element x der Menge A gezeigt wird, dass der Ausdruck y ein Element in B beschreibt.

Wenn die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit den Elementen $1, 2, 3, \ldots$ bereits zur Verfügung steht, dann bezeichnen wir mit $\mathbb{N}_{\leq n}$ den

$$\text{AbschnittBis}(n \textbf{ mit } n \in \mathbb{N}) := \{k \textbf{ mit } k \in \mathbb{N}, k \leq n\};$$

Ist A nun eine beliebige Menge, so werden die Elemente von $\mathcal{F}(\mathbb{N}_{\leq n}, A)$ auch n-Tupel genannt, bzw. genauer

$$\text{Tupel}(n, A \textbf{ mit } n \in \mathbb{N}; A : \text{Menge}) := \text{Element}(\mathcal{F}(\mathbb{N}_{\leq n}, A));$$

Die zugehörige Beispielmenge wird dabei mit A^n bezeichnet. Ein Element x von A^n ist also eine Funktion mit den Argumenten $1, \ldots, n$ und Werten in A. Anstelle von $x(i)$ schreibt man dabei oft x_i und nennt dies die i-te Komponente von x. Eine Kurzbeschreibung der Funktion ergibt sich außerdem durch Angabe aller Komponenten in einer Liste, also $(x_1, \ldots, x_n)$.

Um auch den Fall betrachten zu können, dass die Komponenten eines Tupels in unterschiedlichen Mengen liegen, betrachtet man sogenannte *Produktmengen*: Ist X eine mengenwertige Funktion, dann ist

$$\begin{aligned}&\text{Produktmenge}(X \textbf{ mit } X : \text{Funktion}; \text{Bild}(X) : \text{Mengenfamilie}) :=\\&\quad \{x \textbf{ mit } x \in \mathcal{F}(\text{Def}(X), \textstyle\bigcup \text{Bild}(X));\\&\quad \forall i \textbf{ mit } i \in \text{Def}(X) \textbf{ gilt } x(i) \in X(i)\}\end{aligned}$$

Als Symbol für diese Funktionsmenge wird $\prod X$ verwendet.

Aufgabe 3.19. Zeigen Sie, dass die Zuordnungen

$$\begin{aligned}&\text{Def}(F \textbf{ mit } F :: \text{Funktion}) := \text{Beispielmenge}(\text{Argument}(F)) \ldots : \text{Menge};\\&\text{Bild}(F \textbf{ mit } F :: \text{Funktion}) := \text{Beispielmenge}(\text{Ergebnis}(F)) \ldots : \text{Menge};\end{aligned}$$

die jeder Funktion ihre Defintions- bzw. Bildmenge zuweisen, wohldefiniert sind.

Aufgabe 3.20. Beweisen Sie die Sätze zur Charakterisierung der Definitions- und Bildelemente

$$\begin{aligned}&\forall F, x \textbf{ mit } F :: \text{Funktion} \textbf{ gilt } (x \in \text{Def}(F)) \Leftrightarrow (x : \text{Argument}(F));\\&\forall F, y \textbf{ mit } F :: \text{Funktion} \textbf{ gilt}\\&\quad (y \in \text{Bild}(F)) \Leftrightarrow \exists x \textbf{ mit } x : \text{Argument}(F); y = F(x) \;\square;\end{aligned}$$

Aufgabe 3.21. Zeigen Sie

$$\forall F, x \textbf{ mit } F :: \text{Zuordnung}; x : \text{Argument}(F) \textbf{ gilt } F(x) :: \text{Ergebnis}(F);$$

sowie im Fall von Funktionen

$$\forall F, x \textbf{ mit } F : \text{Funktion}; x \in \text{Def}(F) \textbf{ gilt } F(x) \in \text{Bild}(F);$$

Aufgabe 3.22. Wir definieren die Identitätszuordnung

$$\mathrm{id}(A \textbf{ mit } A : \mathrm{Menge}) := (x \textbf{ mit } x \in A) \mapsto x;$$

und schreiben kurz id_A statt $\mathrm{id}(A)$. Zeigen Sie den Satz

$$\forall A \textbf{ mit } A : \mathrm{Menge} \textbf{ gilt } \mathrm{id}_A : \mathrm{Funktion};$$

Aufgabe 3.23. Sei A eine Menge. Ist dann $\mathcal{F}(A, \emptyset) = \emptyset$? Formulieren und beweisen Sie ihre Hypothese.

Aufgabe 3.24. Zeigen Sie die Hilfsaussagen

$$\forall F, a, b \textbf{ mit } F : \mathrm{Funktion};\ a : \mathrm{Argument}(F);\ b = F(a) \textbf{ gilt } b \in \mathrm{Bild}(F);$$
$$\forall A, B, a, b \textbf{ mit } A, B : \mathrm{Menge};\ a \in A; b \in B \textbf{ gilt } (a, b) \in A \times B;$$

Die folgenden Aufgaben sind als ein größeres Projekt zu verstehen, da sie inhaltlich aufeinander aufbauen.

Aufgabe 3.25. Wir nennen eine Zuordnung *injektiv*, wenn aus der Gleichheit von zwei Ergebnissen stets die Gleichheit der zugehörigen Argumente folgt.

Wir nennen eine Zuordnung G eine *Linksinverse* von F, wenn für jedes Argument x von F die Gleichheit $G(F(x)) = x$ gilt.

Definieren Sie die beiden Begriffe und die folgende Satzaussage präzise: Eine Zuordnung ist injektiv, wenn es eine linksinverse Zuordnung zu ihr gibt.

Beweisen Sie diesen Satz.

Aufgabe 3.26. Definieren Sie zu einem beliebigen Objekt y und einer Zuordnung F den Begriff $\mathrm{ArgumentZu}(y, F)$, dessen Beispiele gerade die Argumente von F sind, die auf y abgebildet werden.

Definieren Sie damit den Begriff *EinsZuEins*, der dann von einer Zuordnung F erfüllt ist, wenn es zu jedem y höchstens ein Argument von F gibt, das auf y abgebildet wird.

Formulieren und beweisen Sie folgenden Satz: Genau dann erfüllt F die Injektivitätsbedingung, wenn es die EinsZuEins Bedingung erfüllt.

Aufgabe 3.27. Zeigen Sie, dass

$$\text{Rückzuordnung}(F \textbf{ mit } F :: \text{injektiv}) := \\ (y \textbf{ mit } y :: \text{Ergebnis}(F)) \mapsto \downarrow \text{ArgumentZu}(y, F)$$

wohldefiniert ist und dass gilt

$$\forall F, x \textbf{ mit } F :: \text{injektiv}; x : \text{Argument}(F) \textbf{ gilt} \\ \text{Rückzuordnung}(F)(F(x)) = x;$$

Ist Rückzuordnung(F) damit eine Linksinverse von F?

Aufgabe 3.28. Wir definieren

$$\text{Inverse}(F \textbf{ mit } F :: \text{injektiv}; F :: \text{Abbildung}(\text{Argument}(F), \text{Objekt})) := \\ \text{Rückzuordnung}(F);$$

Formulieren und beweisen Sie den Satz, dass für jedes zulässige Argument F die Inverse(F) die Bedingung einer Linksinverse von F erfüllt. Zeigen Sie außerdem, dass umgekehrt F :: Linksinverse(Inverse(F)) gilt, wenn die Bildung von Inverse(F) möglich ist.

Aufgabe 3.29. Zeigen Sie, dass für jedes zulässige Argument F von Inverse gilt, dass Inverse(F) ein zulässiges Argument von Inverse ist, und dass Inverse(Inverse(F)) $= F$ gilt.

3.6 Sonstiges

Ein Blick auf die bisher vorgestellten Bildungsmöglichkeiten von Mengen zeigt, dass hinter jeder Art des Zusammenfassens ein bestimmtes Prinzip steckt. Wenn wir eine Menge M vorliegen haben, dann lässt sich aus ihr zwar nicht mehr erkennen, *wie* zusammengefasst wurde, da ja Mengengleichheit allein aus der Gleichheit der enthaltenen Elemente folgt. Die Eigenschaft M : Menge zeigt uns aber noch, *dass* nach einem der Prinzipien zusammengefasst wurde.

Im Fall $M = \{e\}$ führt diese Überlegung dazu, dass M mehr ist als das Element e alleine, da M dafür steht, dass eine Zusammenfassung durchgeführt wurde, dessen Ergebnis genau das Element e umfasst, was eben mehr besagt als nur e.

Um diese Sichtweise im Modell zu verankern, benutzen wir eine zusätzliche Forderung, mit der gezeigt werden kann, dass $e \neq \{e\}$ gilt. Die Forderung wird *Fundie-*

rungsaxiom genannt.

(M11) $\forall M$ **mit** M : nichtleer **gilt** $\exists x$ **mit** $x \in M$; $x \cap M = \emptyset \,\square$;

Mit diesem Axiom lässt sich die angekündigte Aussage zeigen.

(S77) $\forall e$ **mit** e : Objekt **gilt** $e \neq \{e\}$;

In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass ein Objekt e gegeben ist und setzen $E := \{e\}$. Anwendung von (S43) auf (e, e, e) ergibt $e \in E$ und damit $\exists$Element(E), so dass E : nichtleer komprimiert werden kann. Wenden wir das Fundierungsaxiom auf E an, dann können wir von einem Objekt x ausgehen, das $x \in E$ und $x \cap E = \emptyset$ erfüllt. Anwendung von (S41) auf (e, e, x) ergibt eine Äquivalenz, die uns mit Ersetzung in $x \in E$ auf $(x = e) \vee (x = e)$ schließen lässt. Da in beiden Fällen $x = e$ folgt, finden wir durch Ersetzung $e \cap E = \emptyset$. Nehmen wir nun in einen Widerspruchsbeweis $e = E$ an, dann folgt durch Ersetzung zunächst $E \cap E = \emptyset$.

Anwendung eines Satzes aus Aufgabe 3.18 auf E liefert $(E \cap E) = E$, so dass eine Ersetzun $E = \emptyset$ ergibt. Eine weitere Ersetzung in $e \in E$ zeigt dann $e \in \emptyset$. was mit (S37) angewendet auf e die widersprüchliche Situation (wahr = falsch) ergibt $\lightning$ Von der ursprünglichen Annahme gilt daher das Gegenteil, also $e \neq \{e\}$ $\blacksquare$

Durch das Fundierungsaxiom sind wir in der Lage, allein aus der leeren Menge beliebig viele neue Mengen zu konstruieren. Da nämlich $\{\emptyset\}$ von $\emptyset$ verschieden ist, haben wir mit $\{\emptyset\}$ eine neue Menge konstruiert, die genau ein Element hat. Weiter geht es mit der zweielementigen Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, der dreielementigen $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, der vierelementigen $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ und so fort.

Auf diese Weise kann das Konzept der Zahlen in der Mengenlehre eingeführt werden und es wird sogar noch ein entscheidender Zusatzschritt gemacht, nämlich dass die Zusammenfassung aller so konstruierten Mengen *wieder* eine Menge ist. Die entsprechende Forderung heißt *Unendlichkeitsaxiom* und hat die Form

(M12) $\exists A$ **mit** A : Menge; $\emptyset \in A; \forall X$ **mit** $X \in A$ **gilt** $X \cup \{X\} \in A \,\square$

4 Mathematische Strukturen

Nachdem die Mengenlehre nun allgemein beschrieben ist, wollen wir einige Strukturen vorstellen, die auf dem Modell der Mengenlehre aufbauen und eine besondere Bedeutung in der Mathematik besitzen. Als Lernziel geht es darum, auch mit neuen Begriffen wie *Gruppe* oder *Ring* arbeiten zu können, ohne deren Sinn oder weitreichende Bedeutung bereits zu verstehen. Daneben wird aber auch die sehr bekannte Struktur der *natürlichen Zahlen* eingeführt. Hier ist das Lernziel auch bei bereits vertrauten Begriffen die gleiche Vorsicht und logische Sorgfalt anzuwenden, wie bei neuen Begriffen, um tieferes Verständnis der Zusammenhänge von antrainiertem Wissen unterscheiden zu können.

4.1 Gruppen und Ringe

Wir möchten nun untersuchen, wie Elemente einer Menge untereinander interagieren können. Eine grundlegende Struktur der Interaktion spiegelt sich in einer sogenannten *Gruppe* wider.

$$
\begin{aligned}
\text{Gruppe} := G, \mathrm{op}, e, \mathrm{inv}\ &\textbf{mit} \\
& G : \text{Menge}; \\
\text{(G1)} \quad & \mathrm{op} : G \times G \to G; \\
& \forall a, b, c \in G\ \textbf{gilt}\ \mathrm{op}(\mathrm{op}(a, b), c) = \mathrm{op}(a, \mathrm{op}(b, c)); \\
\text{(G2)} \quad & e \in G; \forall a\ \textbf{mit}\ a \in G\ \textbf{gilt}\ \mathrm{op}(e, a) = a; \\
\text{(G3)} \quad & \mathrm{inv} : G \to G; \forall a\ \textbf{mit}\ a \in G\ \textbf{gilt}\ \mathrm{op}(\mathrm{inv}(a), a) = e \ \square
\end{aligned}
$$

Anstatt der Präfix-Schreibweise $\mathrm{op}(a, b)$ verwenden wir oft die Infix-Schreibweise $a * b$. Das Symbol $*$ steht dann für die Gruppenoperation. (G1) liest sich dann wie folgt

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{op} : G \times G \to G; \\
& \forall a, b, c \in G\ \textbf{gilt}\ (a * b) * c = a * (b * c);
\end{aligned}
$$

Wir sagen auch, dass $\mathrm{op} : G \times G \to G$ *assoziativ* ist. Assoziativität bedeutet, dass eine Klammerung keine Rolle spielt.

In der Infix-Schreibweise liest sich (G2) so:

$$e \in G; \forall a \textbf{ mit } a \in G \textbf{ gilt } e * a = a;$$

e mit der Eigenschaft (G2) heißt ein *links-neutrales* Element.
(G3) in Infix-Notation ergibt

$$\mathrm{inv} : G \to G; \forall a \textbf{ mit } a \in G \textbf{ gilt } \mathrm{inv}(a) * a = e;$$

$\mathrm{inv}(a)$ mit der Eigenschaft (G3) heißt *links-inverses* Element von a. Für $\mathrm{inv}(a)$ schreiben wir oft auch a^{-1}.
Falls für eine Gruppe $(G, \mathrm{op}, e, \mathrm{inv})$ zusätzlich gilt

$$\forall a, b \textbf{ mit } a, b \in G \textbf{ gilt } \mathrm{op}(a, b) = \mathrm{op}(b, a);$$

so heißt die Gruppe *abelsch* oder *kommutativ*, also

$$\begin{aligned}&\text{abelscheGruppe} := X \textbf{ mit } X : \text{Gruppe}; (G, \mathrm{op}, e, \mathrm{inv}) := X;\\ &\quad \forall a, b \textbf{ mit } a, b \in G \textbf{ gilt } \mathrm{op}(a, b) = \mathrm{op}(b, a) \ \square;\end{aligned}$$

Sei $(G, \mathrm{op}, e, \mathrm{inv})$ eine Gruppe und $a * b$ eine Abkürzung für $\mathrm{op}(a, b)$. Dann haben wir

(i) $\forall a \textbf{ mit } a \in G \textbf{ gilt } a * \mathrm{inv}(a) = e;$

(ii) $\forall a \textbf{ mit } a \in G \textbf{ gilt } a * e = a;$

(i) besagt: Jedes links-inverse Element von a ist zugleich ein rechts-inverses Element von a. Wir können also von einem inversen Element sprechen.
(ii) besagt: Jedes links-neutrale Element ist zugleich ein rechts-neutrales Element. Wir können also von einem neutralen Element sprechen.

Wir beweisen nun die Aussage (i). Aussage (ii) ist eine Übungsaufgabe. In ausführlicher Form lautet die Satzaussage

(S78) $\forall X, a \textbf{ mit } X : \text{Gruppe}; (G, \mathrm{op}, e, \mathrm{inv}) := X; a \in G \textbf{ gilt } a * \mathrm{inv}(a) = e;$

Beweis: Wir führen einen direkten Beweis. Sei also X, a gegeben mit X : Gruppe. Mit der Abkürzung $(G, \mathrm{op}, e, \mathrm{inv}) := X$ gilt weiter $a \in G$. Mit $b := \mathrm{inv}(a)$ ist unser Ziel der Nachweis von $a * b = e$.

Expansion von X : Gruppe liefert mehrere Satzaussagen, die wir ähnlich zur Definition mit (G1) bis (G3) abkürzen. Anwendung von (G3) auf a zeigt dann $b*a = e$. Das links-inverse Element von b bezeichnen wir mit $c := \mathrm{inv}(b)$, so dass eine Anwendung von (G3) auf b gerade $c * b = e$ ergibt.

Mit dieser Gleichheit und weiteren Gleichheitsaussagen, die sich durch geeignete Anwendungen der Sätze (G1) bis (G3) ergeben, erhalten wir eine Sequenz von Ersetzungsmöglichkeiten. Ausgehend von der Gleichheit $a * b = a * b$, die aus Axiom (A13) folgt, können wir dann jeweils auf der rechten Seite Ersetzungen durchführen, die wir in kompakter Form als Gleichungskette notieren. Über dem Gleichheitszeichen ist dabei immer ein Hinweis auf die benötigte Satzanwendung bzw. Gleichheit gegeben.

$$\begin{aligned} a * b &\overset{\text{(G2)}}{=} (e * a) * b \overset{c*b=e}{=} ((c * b) * a) * b \\ &\overset{\text{(G1)}}{=} (c * (b * a)) * b \overset{b*a=e}{=} (c * e) * b \overset{\text{(G1)}}{=} c * (e * b) \overset{\text{(G2)}}{=} c * b \overset{c*b=e}{=} e, \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also wie gewünscht $a * b = e$ ∎

Dass es in einer Gruppe *genau ein* neutrales Element gibt, wollen wir als nächstes untersuchen. Zunächst definieren wir

neutralesElement(X **mit** X : Gruppe; $(G, \mathrm{op}, e, \mathrm{inv}) := X$) :=
  u **mit** $u \in G; \forall a$ **mit** $a \in G$ **gilt** $u * a = a$ □;

Dann können wir zeigen

$\forall X$ **mit** X : Gruppe **gilt** $\exists!$neutralesElement(X);

Beweis: In einem direkten Beweis sei X gegeben mit X : Gruppe. Zur Abkürzung setzen wir $(G, \mathrm{op}, e, \mathrm{inv}) := X$. Expandieren wir X : Gruppe, so lässt sich e : neutralesElement(X) komprimieren. Wir sehen damit $\exists$neutralesElement(X).

Für den Eindeutigkeitsnachweis zeigen wir zunächst $\forall u$ **mit** u : neutralesElement(X) **gilt** $e = u$. In einem direkten Beweis sei dazu ein neutrales Element u gegeben. Expansion von u : neutralesElement(X) ergibt einen Satz, der nach Anwendung auf e die Aussage $u * e = e$ liefert. Der Satz zur Rechtsneutralität von e angewendet auf u zeigt außerdem $u * e = u$, was schließlich durch Ersetzung auf $e = u$ führt ∎

Der Nachweis von !neutralesElement(X) in einen direkten Beweis ist nun einfach: Seien v, w Beispiele von neutralesElement(X). Anwendung des Satzes auf v, w zeigt $e = v$ und $e = w$ und damit $v = w$ ∎

Durch Kompression können wir schließlich $\exists!$neutralesElement(X) zeigen.

Ebenso gibt es zu jedem Element $a \in G$ *genau ein* inverses Element. Dies ist eine Übungsaufgabe.

Wenn wir auf die Existenz eines neutralen Elements (G2) und auf die Existenz von Inversen (G3) verzichten, so erhalten wir eine sogenannte *Halbgruppe*. Sie ist wie folgt definiert

$$\begin{aligned}
\text{Halbgruppe} :=\; & H, \text{op } \textbf{mit} \\
& H : \text{Menge}; \\
& \text{op} : H \times H \to H; \\
& \forall a, b, c \textbf{ mit } a, b, c \in H \textbf{ gilt } \text{op}(\text{op}(a, b), c) = \text{op}(a, \text{op}(b, c)); \qquad \square
\end{aligned}$$

Ist $(G, \text{op}, e, \text{inv})$ eine Gruppe, dann lässt sich durch Expansion und Kompression leicht zeigen, dass (G, op) auch eine Halbgruppe ist.

Eine Struktur, bei der zwei Funktionen auf einer Menge vorliegen, die sich ähnlich zur bekannten Addition und Multiplikation von Zahlen verhalten, nennen wir einen *Ring*. In der Definition greifen wir auf den Gruppenbegriff zurück.

$$\begin{aligned}
\text{Ring} := \; & R, \text{plus}, e, \text{inv}, \text{mal } \textbf{mit} \\
\text{(R1)} \quad & (R, \text{plus}, e, \text{inv}) : \text{abelscheGruppe}; \\
\text{(R2)} \quad & (R, \text{mal}) : \text{Halbgruppe}; \\
\text{(R3)} \quad & \forall a, b, c \textbf{ mit } a, b, c \in R \textbf{ gilt} \\
& \text{mal}(a, \text{plus}(b, c)) = \text{plus}(\text{mal}(a, b), \text{mal}(a, c)); \\
\text{(R4)} \quad & \forall a, b, c \textbf{ mit } a, b, c \in R \textbf{ gilt} \\
& \text{mal}(\text{plus}(a, b), c) = \text{plus}(\text{mal}(a, b), \text{mal}(b, c)); \qquad \square
\end{aligned}$$

Für $\text{plus}(a, b)$ schreiben wir $a + b$ und für $\text{mal}(a, b)$ schreiben wir $a \cdot b$. Dann besagt (R3) bzw. (R4) für vorgegebene Elemente $a, b, c \in R$ (wenn wir bei der Klammerung der Infix-Ausdrücke auf die Punkt-vor-Strich-Regel zurückgreifen):

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c;$$

Dies sind die sogenannten *Distributivgesetze*. Sie regeln das Zusammenspiel von additiver und multiplikativer Verknüpfung. Für $\text{inv}(a)$ schreiben wir bei einer additiven Gruppe oft $-a$. Für das neutrale Element einer additiven Gruppe schreiben wir 0. In einem Ring $(R, \text{plus}, 0, \text{inv}, \text{mal})$ gelten stets

(i) $\forall a$ **mit** $a \in R$ **gilt** $0 \cdot a = 0$;

(ii) $\forall a, b$ **mit** $a, b \in R$ **gilt** $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Wir beweisen die Aussage (i). Aussage (ii) ist eine Übungsaufgabe. In ausführlicher Form lautet sie

(S79) $\forall X, a$ **mit** X : Ring; $(R, \text{plus}, 0, \text{inv}, \text{mal}) := X; a \in R$ **gilt** $0 \cdot a = 0$;

Beweis: Wir nehmen an, X, a sind gegeben mit X : Ring. Zur Abkürzung sei $(R, \text{plus}, 0, \text{inv}, \text{mal}) := X$ mit den üblichen Infix-Notationen für plus und mal. Die Voraussetzung umfasst dann auch noch $a \in R$. Eine Expansion von X : Ring liefert geltende Aussagen, die wir wie in der Definition mit (R1) bis (R4) abkürzen.

Anwendung von (R4) auf $(0, 0, a)$ ergibt $(0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Expansion von $(R, \text{plus}, 0, \text{inv})$: Gruppe liefert einen Satz zum neutralen Element, dessen Anwendung auf 0 die Aussage $0 + 0 = 0$ ergibt. Ersetzung zeigt also weiter, dass $0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$ gilt. Anwendung des Satzes zum Inversen in einer Gruppe angewendet auf $0 \cdot a$ zeigt weiter $-(0 \cdot a) + 0 \cdot a = 0$ bzw. nach Ersetzung

$$-(0 \cdot a) + (0 \cdot a + 0 \cdot a) = 0$$

Anwendung des Assoziativgesetzes und anschließender Ersetzung führt auf

$$0 + 0 \cdot a = 0$$

Mit einer weiteren Anwendung des Satzes zum neutralen Element in der Gruppe finden wir schließlich nach Ersetzung $0 \cdot a = 0$ ■

Aufgabe 4.1. Zeigen Sie:

$\forall X, a$ **mit** X : Gruppe; $(G, \text{op}, e, \text{inv}) := X; a \in G$ **gilt** $a * e = a$;

Aufgabe 4.2. Definieren Sie den Begriff Gruppenelement(X), dessen Beispiele gerade die Elemente der Menge aus X sind. Definieren Sie dann den Begriff inversesElementZu(a, X) für eine Gruppe X und ein zugehöriges Gruppenelement a und zeigen Sie:

$\forall a, X$ **mit** X : Gruppe; a : Gruppenelement(X)
gilt $\exists!$inversesElement(a, X);

Aufgabe 4.3. Zeigen Sie für eine beliebige Gruppe $(G, \text{op}, e, \text{inv})$ die Rechenregeln $e * e = e, e^{-1} = e$. Außerdem sind die Regeln $(a^{-1})^{-1} = a$ und $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ für beliebige Gruppenelemente a, b zu zeigen.

Aufgabe 4.4. Zeigen Sie:

$\forall X, a, b$ **mit** X : Ring; $(R, \text{plus}, 0, \text{inv}, \text{mal}) := X; a, b \in R$ **gilt**
$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$;

4.2 Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ sind uns wohl bekannt. Die Grundlage unseres Umgangs mit den natürlichen Zahlen halten wir in Form der sogenannten *Peano-Axiome* fest, die als mathematisches Modell des Zählens betrachtet werden können.

Modell natürlicheZahlen
benutzt $\mathbb{N}, \varphi, 1$ **mit**
$\mathbb{N}$: Menge;
$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
(P1) $1 \in \mathbb{N}$;
(P2) $1 \notin \text{Bild}(\varphi)$;
(P3) $\forall m, n$ **mit** $m, n \in \mathbb{N}; \varphi(m) = \varphi(n)$ **gilt** $m = n$;
(P4) $\forall A$ **mit** A : Menge; $A \subset \mathbb{N}; 1 \in A; \forall n$ **mit** $n \in A$ **gilt** $\varphi(n) \in A$ **gilt**
$A = \mathbb{N}$;
(P5) $\forall M, f, s$ **mit** M : Menge; $f : \mathbb{N} \times M \to M; s \in M$ **gilt**
$\exists! a$ **mit** $a : \mathbb{N} \to M; a(1) = s$;
$\forall n$ **mit** $n \in \mathbb{N}$ **gilt** $a(\varphi(n)) = f(n, a(n))$ □;
□

Die Funktion φ nennen wir die *Nachfolgerfunktion*. Statt $\varphi(n)$ schreiben wir auch abkürzend n^+ und wechseln von einer Prä- zu einer Postfix-Notation. An dieser Stelle ist 1 nur ein Symbol für ein Element der Menge $\mathbb{N}$. Statt 1^+ schreiben wir 2, für 2^+ schreiben wir 3, usw.

- (P2) besagt: Das Element 1 hat keinen Vorgänger.
- (P3) besagt: Die Nachfolgerfunktion φ ist injektiv, d.h., wenn zwei Nachfolger übereinstimmen, so auch ihre Vorgänger.
- (P4) ist das *Induktionsaxiom*. Es besagt: Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen, die die 1 enthält und mit jedem Element auch dessen Nachfolger, ist bereits die Menge der natürlichen Zahlen. Das Induktionsaxiom ist grundlegend für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion.
- (P5) ist das *Induktionsprinzip*. Es erlaubt uns, Funktionen auf $\mathbb{N}$ induktiv zu definieren: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ möchten wir ein Element $a(n)$ einer Menge M definieren. Dazu legen wir den „Startwert“ $a(1)$ durch s fest und geben eine Vorschrift an, wie wir $a(n^+)$ aus $a(n)$ erhalten. Die Elemente $a(n)$ sind durch den Startwert und die Vorschrift eindeutig festgelegt.

Zur Illustration von (P5) definieren wir die Fakultätsfunktion $\text{fak} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ induktiv. Wir legen fest

$\text{fak}(1) := 1;$
$\text{fak}(n^+) := n^+ \cdot \text{fak}(n);$

Um ein Gefühl für das Verhalten der so beschriebenen Funktion zu gewinnen, berechnen wir die ersten Funktionswerte:

$$\text{fak}(1) = 1; \quad \text{fak}(2) = 2 \cdot 1; \quad \text{fak}(3) = 3 \cdot (2 \cdot 1); \quad \text{fak}(4) = 4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot 1)); \ldots$$

Dass die Beschreibung durch die Bedingungen $\text{fak}(1) := 1$ und $\text{fak}(n^+) := n^+ \cdot \text{fak}(n)$ tatsächlich eine Funktion auf $\mathbb{N}$ definiert, folgt allerdings nicht aus der Tatsache, dass wir uns vorstellen könnten, den Rechenprozess immer weiter fortzuführen. Praktisch müssten wir ja irgendwann aufhören, ohne alle Funktionswerte bestimmt zu haben.

Statt dessen wird der Satz (P5) benötigt, um die Funktion zu definieren, wobei die vollständige Argumentation so verläuft: Aus den angegebenen Informationen lassen sich alle Daten gewinnen, die zur Anwendung von (P5) benötigt werden. Der Startwert s ist gerade der Ausdruck rechts von := in $\text{fak}(1) := 1$. Die Induktionszuordnung f lässt sich aus $\text{fak}(n^+) := n^+ \cdot \text{fak}(n)$ ablesen: Da die in (P5) mit dem Platzhalter a bezeichnete Zuordnung allgemein die Beziehung $a(n^+) = f(n, a(n))$ erfüllt, muss in unserem Fall gerade $f(n, u) = n^+ \cdot u$ gewählt werden, damit die Bedingung aus der zweiten Zeile nach Anwendung von (P5) erfüllt sein wird. Schließlich lässt sich eine geeignete Menge M aus der Struktur von f extrahieren: Das Produkt $a \cdot b$ von zwei natürlichen Zahlen a und b ist selbst wieder eine natürliche Zahl (hier haben wir uns einen kleinen Vorgriff gestattet, da das Produkt selbst noch definiert werden muss). Eine geeignete Wahl für M ist damit die Menge $\mathbb{N}$.

Definieren wir also

$$f := \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n, u) & \mapsto & n^+ \cdot u \end{cases}$$

so zeigt eine Anwendung von (P5) auf $(\mathbb{N}, f, 1)$ die Existenz eines eindeutigen Beispiels, das wir *fak* nennen

$\text{fak} :=\downarrow a$ **mit** $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; a(1) = 1;$
$\quad \forall n$ **mit** $n \in \mathbb{N}$ **gilt** $a(\varphi(n)) = f(n, a(\varphi(n)));$

Durch Expansion erhalten wir nun genau die Eigenschaften, die wir haben wollten, nämlich $\text{fak}(1) = 1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $\text{fak}(n^+) = n^+ \cdot \text{fak}(n)$, wobei man in der Praxis die Postfix-Notation $n!$ (lies: „n Fakultät“) anstelle von $\text{fak}(n)$ wählt.

Da die Anwendung von (P5) bei induktiven Definitionen immer nach genau dem angegebenen Muster verläuft, lässt man die Details in der Praxis normalerweise weg und begnügt sich mit der Angabe der gewünschten induktiven Eigenschaften der mit (P5) zu konstruierenden Funktion.

Möchte man induktiv definierte Funktionen genauer auf ihre Eigenschaften untersuchen, so erhält das Induktionsaxiom (P4) eine besondere Bedeutung. Da zum Beispiel $n!$ das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n ist, könnte man die Vermutung haben, dass $n!$ von n ohne Rest geteilt wird, dass also $n|(n!)$ gilt und zwar für *jedes* $n \in \mathbb{N}$. Natürlich kann man diese unendlich vielen Aussagen nicht der Reihe nach abarbeiten, da es unendlich viele sind. Genau hier hilft das Induktionsaxiom. Definieren wir zur Abkürzung

$$A(n \textbf{ mit } n \in \mathbb{N}) := n|(n!) \ldots : \text{Wahrheitswert};$$

so erhalten wir eine wahrheitswertige Funktion auf $\mathbb{N}$, eine sogenannte Aussagenfolge.

$$\begin{aligned}\text{Aussagenfolge} :=& A \textbf{ mit } A : \text{Funktion}; \text{Def}(A) = \mathbb{N};\\ & \text{Element}(\text{Bild}(A)) \sqsubset \text{Wahrheitswert} \ \square;\end{aligned}$$

Bei unserer Aussagenfolge sind wir interessiert daran zu zeigen, dass jede der einzelnen Aussagen gilt, bzw. dass A *immer gültig ist*

$$\text{immergültig} := A \textbf{ mit } A : \text{Aussagenfolge}; \forall n \textbf{ mit } n \in \mathbb{N} \textbf{ gilt } A(n) \ \square;$$

Um dies nachzuweisen müssen im Sinne von (P4) zwei Bedingungen erfüllt sein: Die erste Aussage $A(1)$ muss gelten und wenn für ein beliebiges n die Aussage $A(n)$ gilt, dann muss auch $A(n^+)$ gelten. Wir sprechen auch davon, dass A *verankert* und *schrittstabil* ist, also

$$\begin{aligned}\text{verankert} :=& A \textbf{ mit } A : \text{Aussagenfolge}; A(1) \ \square;\\ \text{schrittstabil} :=& A \textbf{ mit } A : \text{Aussagenfolge}; \forall n \textbf{ mit } n \in \mathbb{N}; A(n) \textbf{ gilt } A(n^+) \ \square;\end{aligned}$$

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, dann zeigt (P4) angewendet auf $B := \{n \textbf{ mit } n \in \mathbb{N}; A(n)\}$, dass $B = \mathbb{N}$ ist und somit $A(n)$ für *jedes* n gilt. Aus (P4) folgt also der Satz

(S80) $\forall A \textbf{ mit } A : \text{verankert}; A : \text{schrittstabil} \textbf{ gilt } A : \text{immergültig};$

Anschaulich handelt es sich hierbei um ein Dominoprinzip: Steht $A(n)$ für die Aussage, dass der n-te Stein in einer Reihe aufgestellter Dominosteine umfällt, dann steht A : schrittstabil im wesentlichen für die Tatsache, dass jeder Stein so aufgestellt ist, dass wenn er fällt ($A(n)$ gilt) auch der Nachfolger fällt ($A(n^+)$ gilt). Ist die Folge auch noch verankert, d.h. fällt auch der erste Stein ($A(1)$ gilt), dann fallen automatisch *alle* Steine, d.h. $A(n)$ gilt für jedes n. Durch das Axiom (P4) wird diese Grundidee in die natürlichen Zahlen eingebaut.

Wir definieren nun induktiv die gewöhnliche Addition von natürlichen Zahlen. Sei $a \in \mathbb{N}$. Wir definieren zunächst eine Funktion $\sigma_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, induktiv durch

$$\begin{aligned} &\sigma_a(1) := a^+; \\ &\sigma_a(n^+) := (\sigma_a(n))^+; \end{aligned}$$

Die führenden Funktionswerte sind damit

$$\sigma_a(1) := a^+; \quad \sigma_a(2) := (a^+)^+; \quad \sigma_a(3) := ((a^+)^+)^+; \ldots$$

Wir ahnen an dieser Stelle, dass $\sigma_a(n)$ damit der n-te Nachfolger von a ist. Diesen bezeichnen wir aber schon seit unserer Grundschulzeit mit $a + n$. Um dies auch in unserem Modell der natürlichen Zahlen machen zu können, definieren wir

$$\text{plus} := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (a, n) & \mapsto & \sigma_a(n) \end{array} \right.$$

und vereinbaren $a+n$ als Infix-Schreibweise von $\text{plus}(a, n)$. Aus den induktiven Eigenschaften von σ_a folgen nun sofort zwei grundlegende Sätze für die plus-Funktion. Zunächst gilt wegen $\sigma_a(1) = a^+$ in neuer Schreibweise $a + 1 = a^+$. Aus der Regel $\sigma_a(n^+) = (\sigma_a(n))^+$ folgt außerdem mit der neuen Schreibweise $a + n^+ = (a + n)^+$. Es gilt also

(S81) $\forall n$ **mit** $n \in \mathbb{N}$ **gilt** $n + 1 = n^+$;
(S82) $\forall m, n$ **mit** $m, n \in \mathbb{N}$ **gilt** $m + n^+ = (m + n)^+$;

Alle Rechenregeln, an die wir uns seit der Grundschule gewöhnt haben, lassen sich nun streng beweisen. Insbesondere ist $\text{plus} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ assoziativ, d.h.

$$\forall a, b, c \textbf{ mit } a, b, c \in \mathbb{N} \textbf{ gilt } (a + b) + c = a + (b + c);$$

Offensichtlich ist die zu zeigende Behauptung eine Aussage über *drei* beliebige natürliche Zahlen, während sich das Induktionsprinzip nur auf Aussagefolgen, also Aussagen über *eine* beliebige natürliche Zahl, bezieht. Ein Trick, der in diesem Fall funktioniert, besteht darin, die Aufgabe erst etwas abgewandelt zu formulieren, d.h. wir beweisen zuerst den Satz

$\forall a, b$ **mit** $a, b \in \mathbb{N}$ **gilt** $\forall c$ **mit** $c \in \mathbb{N}$ **gilt** $(a+b)+c = a+(b+c)$;

In einem direkten Beweis nehmen wir daher an, dass a, b gegeben sind mit $a, b \in \mathbb{N}$. Um die Behauptung zu zeigen, definieren wir die Aussagenfolge $A(c$ **mit** $c \in \mathbb{N}) := ((a+b)+c = a+(b+c))$. Können wir nun A : immergültig zeigen, dann folgt die Behauptung durch Expansion.

Unser neues Ziel ist daher die Anwendung von (S80). Als Verankerung (Induktionsanfang) müssen wir $A(1)$ zeigen. Für $c = 1$ ergibt sich

$$(a+b)+1 \overset{(S81)}{=} (a+b)^+ \overset{(S82)}{=} a+b^+ \overset{(S81)}{=} a+(b+1);$$

Somit die Aussagenfolge verankert. Nun weisen wir nach, dass sie ebenfalls schrittstabil ist (Induktionsschritt). Den für die Kompression notwendigen Satz beweisen wir dabei durch einen direkten Beweis. Wir nehmen dazu an, dass n gegeben ist und dass $A(n)$ gilt. Unser Ziel ist dann der Nachweis von $A(n^+)$. Wir haben

$$(a+b)+n^+ \overset{(S82)}{=} ((a+b)+n)^+ \overset{A(n)}{=} (a+(b+n))^+ \overset{(S82)}{=} a+(b+n)^+ \overset{(S82)}{=} a+(b+n^+);$$

d.h., $A(n^+)$. Insgesamt ist die Aussagenfolge verankert und schrittstabil und gilt daher für alle $c \in \mathbb{N}$ ■

Mit dem so bewiesenen Hilfsatz können wir das Assoziativgesetz in einem direkten Beweis zeigen. Dazu nehmen wir an, dass a, b, c gegeben sind mit $a, b, c \in \mathbb{N}$. Wenden wir den Hilfsatz auf a, b an, so folgt eine Satzaussage, die wir auf c anwenden. Es folgt $(a+b)+c = a+(b+c)$ ▪

Ebenfalls kann man zeigen, dass die Addition kommutativ ist, d.h.

$$\forall a, b \textbf{ mit } a, b \in \mathbb{N} \textbf{ gilt } a+b = b+a;$$

Ferner gilt das sogenannte *Schaukel-Lemma*, bei dem das Nachfolger-Plus zwischen zwei Summanden hin- und herschaukelt

$\forall m, n$ **mit** $m, n \in \mathbb{N}$ **gilt** $m+n^+ = m^+ + n$;

Wie im vorangegangenen Beweis zeigen wir zuerst

$\forall m$ **mit** $m \in \mathbb{N}$ **gilt** $\forall n$ **mit** $n \in \mathbb{N}$ **gilt** $m+n^+ = m^+ + n$;

Sei dazu in einem direkten Beweis $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir definieren damit $A(n$ **mit** $n \in \mathbb{N}) := (m + n^+ = m^+ + n)$ und zeigen A : immergültig durch Anwendung von (S80). Die Folgerung ergibt sich dann durch Expansion.

Um die Voraussetzungen von (S80) zu zeigen, weisen wir zunächst $A(1)$ nach: Für die linke Seite in $A(1)$ gilt

$$m + 1^+ \overset{\text{(S81)}}{=} (m+1)^+ = (m^+)^+.$$

Für die rechte Seite gilt

$$m^+ + 1 = (m^+)^+.$$

Also stimmt die linke mit der rechten Seite überein, d.h. $A(1)$. Nun zur Schrittstabilität (Induktionsschritt): Die benötigte Satzaussage zeigen wir in einem direkten Beweis. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ gegeben und es gelte $A(n)$, d.h. $m+n^+ = m^++n$. Wir müssen nun $A(n^+)$ zeigen, d.h. $m + (n^+)^+ = (m^+)^+ + n$. Wir haben

$$m+(n^+)^+ \overset{\text{(S82)}}{=} (m+n^+)^+ \overset{A(n)}{=} (m^++n)^+ = (n+m^+)^+ \overset{\text{(S82)}}{=} n+(m^+)^+ = (m^+)^++n.$$

wobei an zwei Stellen die Kommutativität benutzt wurde. Damit ist auch die Schrittstabilität gezeigt, so dass die Aussagenfolge für alle natürlichen Zahlen gültig ist ■ In einem direkten Beweis lässt sich nun das eigentliche Schaukel-Lemma durch Anwendung des Hilfsatzes zeigen ▪

Analog zur Addition können wir die Multiplikation von natürlichen Zahlen induktiv erklären, indem wir eine Funktion $\pi_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch induktive Bedingungen festlegen: Für ein gegebenes $a \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\begin{aligned} \pi_a(1) &:= a; \\ \pi_a(n^+) &:= \pi_a(n) + a; \end{aligned}$$

und führen hier auch die Berechnung der ersten Funktionswerte durch

$$\pi_a(1) = a; \quad \pi_a(2) = a+a; \quad \pi_a(3) = (a+a)+a; \quad \pi_a(4) = ((a+a)+a)+a; \ldots$$

Wir erahnen hierdurch, dass $\pi_a(n)$ die n-fache Summe von a ist und damit sinngemäß für das Produkt $a \cdot n$ steht. Um dies als Infix-Notation benutzen zu können, definieren wir

$$\text{mal} := \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to \quad \mathbb{N} \\ (a, n) & \mapsto \quad \pi_a(n) \end{cases}$$

und vereinbaren $a \cdot n$ als Infix-Schreibweise von $\mathrm{mal}(a, n)$. Aus den induktiven Eigenschaften von π_a folgen nun wieder zwei grundlegende Sätze für die mal-Funktion

(S83) $\forall n$ **mit** $n \in \mathbb{N}$ **gilt** $n \cdot 1 = n$;
(S84) $\forall m, n$ **mit** $m, n \in \mathbb{N}$ **gilt** $m \cdot n^+ = m \cdot n + m$;

Auch hier lassen sich die üblichen Rechenregeln wieder induktiv beweisen.

Ein weiteres und wichtiges Beispiel einer induktiven Definition ist das Summenzeichen, das wir hier für natürliche Zahlen einführen Es sei dazu eine Folge natürlicher Zahlen gegeben, d.h. eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Für $a(k)$ schreiben wir bei Folgen gewöhnlich a_k. Dann definieren wir die Funktion $\mathrm{sum} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ induktiv durch

$$\begin{aligned}&\mathrm{sum}(1) := a_1;\\ &\mathrm{sum}(n^+) := \mathrm{sum}(n) + a_{n^+}\end{aligned}$$

Schauen wir uns wieder die ersten Funktionswerte an, so sind dies

$$\mathrm{sum}(1) = a_1; \quad \mathrm{sum}(2) = a_1 + a_2; \quad \mathrm{sum}(3) = (a_1 + a_2) + a_3; \ldots$$

Wir erkennen damit, dass $\mathrm{sum}(n)$ für die Summe der Folgenglieder $a_1, \ldots, a_n$ steht. Üblicherweise verwenden wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

als Symbol für $\mathrm{sum}(n)$. Unter Verwendung von $n^+ = n + 1$ haben wir dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1} a_k &= a_1;\\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}.\end{aligned}$$

Analog definieren wir $\mathrm{prod} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned}&\mathrm{prod}(1) = a_1;\\ &\mathrm{prod}(n^+) := \mathrm{prod}(n) \cdot a_{n^+};\end{aligned}$$

Die übliche Schreibweise für $\mathrm{prod}(n)$ ist

$$\prod_{k=1}^{n} a_k.$$

In dieser Schreibweise haben wir

$$\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1;$$
$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n+1}.$$

Aufgabe 4.5. Zeigen Sie

(i) $\forall a, b$ **mit** $a, b \in \mathbb{N}; a \neq b$ **gilt** $a^+ \neq b^+$;

(ii) $\forall a$ **mit** $a \in \mathbb{N}$ **gilt** $a^+ \neq a$;

Aufgabe 4.6. Zeigen Sie

$$\forall m \textbf{ mit } m \in \mathbb{N} \textbf{ gilt } m + 1 = 1 + m;$$

Aufgabe 4.7. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q \neq 1$. Wir definieren induktiv

$$p(1) := q; p(n^+) := q \cdot p(n);$$

Für $p(n)$ schreiben wir q^n. Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Sie können dabei die Rechenoperationen in $\mathbb{Q}$ wie in der Schule benutzen.

Aufgabe 4.8. Zeigen Sie

$$\forall n \textbf{ mit } n \in \mathbb{N} \textbf{ gilt } 9|(4^n + 15n - 1);$$

Hier verwenden wir den Satz

$$\forall m, n \textbf{ mit } m, n \in \mathbb{N} \textbf{ gilt } n|m \Leftrightarrow \exists k \textbf{ mit } k \in N \textbf{ gilt } m = k \cdot n \square;$$

Außerdem dürfen Sie in $\mathbb{N}$ wie in der Schule rechnen.

5 Mathematik in der Praxis

Im Vorkurs haben wir die mathematische Sprache systematisch vorgestellt und den engen Bezug zwischen den grundlegenden Aussageformen $x = y$, $x : B$, $\exists B$, $E \wedge F$, $E \vee F$, $E \Rightarrow F$, $\neg E$, $\forall x$ **mit** B **gilt** F und den zugehörigen Beweisschritten herausgearbeitet. Zusammen mit den Definitionsmöglichkeiten für Begriffe und Zuordnungen sind dies bereits alle Grundbausteine zum Aufbau des Mathematikgebäudes. Dies sollte eine *beruhigende Wirkung* auf Sie haben, da die Grundprinzipien doch sehr überschaubar sind.

Obwohl das präsentierte Regelwerk aus einer genauen Analyse der mathematischen Praxis in Forschung und Lehre hervorgegangen ist, wird man es in dieser herauspräparierten Form im mathematischen Alltag nicht direkt finden. Egal welche Schreib- und Argumentationsweisen Ihnen aber in den kommenden mathematischen Vorlesungen begegnen werden, sie lassen sich grundsätzlich in das Ihnen nun bekannte Format umwandeln und mit den vorgestellten Techniken bearbeiten.

Zu dem notwendigen Umwandlungsprozess zwischen unterschiedlichen Schreib- und Argumentationsweisen werden in den folgenden Abschnitten einige Hinweise gegeben.

5.1 Ersetzungen

Die Bildung eines neuen mathematischen Objekts geschieht dadurch, dass seine Beziehung zu anderen Objekten beschrieben wird. Dadurch entstehen die spezifischen Eigenschaften, die letztlich die *Bedeutung* des Objekts ausmachen.

Im Rahmen des Modells der natürlichen Zahlen erhält zum Beispiel das mit 1 bezeichnete Objekt seine Bedeutung durch das in den Axiomen geregelte Zusammenspiel mit der Nachfolgerfunktion φ und der Menge $\mathbb{N}$. Abgeleitete Objekte wie das mit 2 abgekürzte Ergebnis $\varphi(1)$ erben dann ihre Bedeutung aus der speziellen Kombination der Ausgangsobjekte und deren Bedeutung.

Das Beispiel zeigt bereits, dass zur Beschreibung eines Objekts unterschiedliche Darstellungen benutzt werden können. Anstelle von 2 kann man auch $\varphi(1)$ schreiben oder nach Einführung der Subtraktion auch $3 - 1$ oder $5 - 3$ usw. Eine ganz anders aussehende Darstellung ist dagegen $\downarrow n$ **mit** $n \in \mathbb{N}; n \cdot n = 4 \;\square$ was auch mit $\sqrt{4}$ abgekürzt wird. Alle diese unterschiedlich erscheinenden Darstellungen haben aber doch gemeinsam, dass sie das gleiche Objekt beschreiben, d.h. zwischen jeweils zwei der Darstellungen gelten entsprechende Gleichheitsaussagen.

Menschen ist der prinzipielle Umgang mit solchen Situationen sehr vertraut. So erkennt man eine Person bis zu einem gewissen Grad unabhängig von ihrer aktuellen Darstellung, d.h. egal wie verschlafen, ölverschmiert, verstrubbelt oder (un)geschminkt sie gerade aussieht. Ist das Wiedererkennen problemlos möglich wird man mit der Person auch in der aktuellen Darstellungsform genauso umgehen, wie man es in anderen Darstellungsformen gewohnt ist, ohne den Darstellungszustand überhaupt zu thematisieren. Das wird man höchstens bei dramatischeren Darstellungsänderungen tun, also zum Beispiel bei Verkleidung, großflächiger Tätowierung, massiver Frisuränderung usw.

Diese gewohnte Verhaltensweise wird in der Praxis auch auf den Umgang mit mathematischen Objekten übertragen: Wechselt man in einer geltenden Aussage die Darstellung eines mathematischen Objekts, so wird darauf nicht besonders hingewiesen, wenn die Gleichheit der beiden Darstellungsformen als allgemein bekannt angesehen wird. Der Ersetzungsschritt wird hier also vollständig unterdrückt. Dies gilt sogar, wenn die Gleichheit erst durch eine Satzanwendung gewonnen werden kann.

Als Beispiel erwähnen wir den Übergang von $n \in \{1, 2\}$ zu $(n = 1) \vee (n = 2)$, der in der Praxis normalerweise nicht näher erläutert wird, während er im Vorkursformat zunächst die Anwendung des Satzes (S41) auf $(1, 2, n)$ mit einem anschließenden Ersetzungsschritt erfordert.

Nur bei Darstellungswechseln, bei denen der Autor davon ausgeht, dass seine Leser die entsprechende Gleichheit nicht kennen (wie etwa $2 = 3 + e^{i\pi}$ bei Vorkursteilnehmern), wird der Ersetzungsprozess detailierter beschrieben.

5.2 Satzanwendungen

Mathematische Sätze stellen die Fakten dar, die über mathematische Objekte und Strukturen bekannt sind. Das Kennenlernen von Objekten geht daher immer mit einer wachsenden Sammlung von Sätzen über die Objekte und ihre Zusammenhänge einher. Dabei ergibt sich automatisch ein Referenzproblem: Bei der immer größer werdenden Zahl an Sätzen ist eine inhaltlich motivierte Namensgebung sehr schwierig. Daher tragen nur wenige, sehr wichtige Sätze Namen, die oft mit den Namen der Entdecker gebildet werden (Approximationssatz von Weierstraß, Riemannscher Abbildungssatz etc.) Eine fortlaufende Durchnummerierung löst zwar kurzfristig das Referenzproblem, ist aber langfristig ungeeignet, da man schnell wieder vergisst, was sich hinter den inhaltslosen Abkürzungen Satz (S30) oder Axiom (A13) verbirgt.

In der Praxis wird daher normalerweise auf Satzreferenzen verzichtet, wodurch auch der Anwendungsschritt nicht mehr erkennbar ist. Statt *Anwendung von (S30) auf* U gibt man einfach das Resultat als Faktum bekannt, etwa in der Form *Nun gilt Element(Beispielmenge(*U*))* $= U$. Andere Wörter, die auf eine Satzanwendung hindeuten sind *daher, damit, somit* usw.

Dies entspricht dem alltäglichen Umgang etwa mit Naturgesetzen, die auch keine Namen tragen, aber als Fakten jedermann bekannt sind (wie etwa die Regel, seine Hand nicht auf eine heiße Herdplatte zu legen).

Nachteilig ist dieses Vorgehen natürlich für Leser, die mit den Fakten in einem Gebiet noch nicht sehr vertraut sind. Sie müssen dann ausgehend von der Form der gefolgerten Aussage aus der Liste der geltenden Sätze diejenigen herausfinden, deren Folgerung bei geeigneter Belegung der Platzhalter auf die Aussage führt, sofern die Voraussetzungen des Satzes mit dieser Belegung erfüllt sind.

Beispielsweise werden grundlegende Tautologien, wie wir sie zu Beginn des Kurses gezeigt haben, ohne weiteren Hinweis auf die jeweilige Satzanwendung benutzt. Gilt etwa die Aussage $x > 5$ für eine reelle Zahl x, so schließt man sofort, dass auch $x \geq 5$ gilt, ohne (S11) auf $(x > 5, x = 5)$ anzuwenden. Genauso wird man bei Vorliegen der Aussage ∃Widerspruch einen Widersruchsbeweis sofort mit $\lightning$ beenden, ohne vorher (wahr = falsch) durch Satzanwendungen abzuleiten. Entsprechend schließt man aus dem gleichzeitigen Gelten einer Aussage und ihres Gegenteils sofort auf das Gelten jeder beliebigen andere Aussage und umgeht damit die immer gleiche Kombination der Anwendungen von (S20), (S16) sowie einer Anwendung der aus (S16) folgenden Satzaussage.

5.3 Sei ...

Trifft man in einer mathematischen Argumentation auf eine Floskel der Form *Seien* x, y *fest gewählte reelle Zahlen mit* $x > y$ ..., so kann man davon ausgehen, dass hier der direkte Beweis einer für-alle-Aussage der Form $\forall x, y$ **mit** $x > y; \ldots$ eingeleitet wird. Welche Folgerung der Satz hat, erkennt man oft erst an der Aussage, mit der die Argumentation endet.

Floskeln der Art *Nehmen wir an, dass* $u > 1$ *gilt* ... können sowohl den direkten Beweis einer Implikation als auch einen Widerspruchsbeweis einleiten. Um was es sich handelt, merkt man am Ende der Argumentation, je nachdem ob mit einem

Widerspruch oder einer herausgearbeiteten Folgerung geschlossen wird.

5.4 Quantoren und Mengen

Die in der Praxis beobachtbare Formen von für-alle- und existiert-Aussagen sind sehr vielfältig. Gemeinsam ist dabei nur, dass $\forall$ als *für-alle* und $\exists$ als *es existiert* bzw. *es gibt* ausgesprochen wird.

Möchte man ausdrücken, dass $f(x)$ für alle x in einer Menge M größer als Null ist, so ist die Vorkursschreibweise

$$\forall x \textbf{ mit } x \in M \textbf{ gilt } f(x) > 0$$

Mögliche Varianten der gleichen Aussage sind

$$f(x) > 0 \; \forall x \in M$$

mit nachgestelltem für-alle-Symbol oder

$$\forall x \in M : f(x) > 0$$

wobei der Doppelpunkt hier nicht die Infix-Abkürzung der Beispiel-Zuordnung ist, sondern als Trennungssymbol zwischen Variablenbedingung und Folgerung verstanden wird (Pendant zu **gilt**). Zwischen $\forall$ und dem Doppelpunkt sollte dabei immer eine Kombination aus Platzhalter, Elementsymbol und Menge stehen, aber diese Einschränkung wird oft aus Bequemlichkeit aufgeweicht, wie zum Beispiel in der wichtigen Grenzwertdefinition

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - A| < \varepsilon$$

In diesem Beispiel sieht man auch, dass Existenzaussagen ebenfalls in modifizierter Form auftreten (der Doppelpunkt in $\exists$-Aussagen wird dabei als *mit* gelesen während er in $\forall$-Aussagen eher für *gilt* steht).

Wird über mehrere Platzhalter quantifiziert, wie im Beispiel

$$\forall x, y \textbf{ mit } x \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}^3; x_1 > y_1 \textbf{ gilt } \ldots$$

so müsste in strenger Form die alternative Variante so aussehen

$$\forall (x, y) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 : u_1 > u_2\} : \ldots$$

Faktisch würde man hier aber die Regelvorgabe kreativ umgehen und so etwas wie

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : \forall y \in \mathbb{R}^3, x_1 > y1 : \ldots$$

oder

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^3 : (x_1 > y1) \Rightarrow : \ldots$$

wobei die letzte Variante unhandlich ist, wenn die Folgerung selbst eine Implikation ist.

Die Schreibvielfalt setzt sich bei Mengen fort, wo man statt

$$\{n \textbf{ mit } \exists k \textbf{ mit } k \in \mathbb{N}; n = 2 \cdot k \ \square\}$$

auch gerne

$$\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2 \cdot k\}$$
$$\{n \in \mathbb{N} : n = 2 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$$
$$\{n \in \mathbb{N} | n = 2 \cdot k \quad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{N}\}$$
$$\{2 \cdot k | k \in \mathbb{N}\}$$

oder ähnliche Formen findet. Insgesamt gibt es also einen gewissen Wildwuchs in der Notation, aber solange eine Systematik erkennbar ist und Mehrdeutigkeiten bzw. Missverständnisse ausgeschlossen sind, kann man immer von einer Systematik in eine andere wechseln.

5.5 Lemma, Satz und Korollar

Mathematische Satzaussagen werden in Vorlesungen gerne in umgangssprachliche Hüllen verpackt, die leichter zu erfassen sind als symbollastige Darstellungen. Durch die Einleitung mit einem der Worte *Satz, Lemma, Proposition, Korollar* wird zusätzlich auf die Bedeutung des Ergebnisses hingewiesen. Faktisch stehen alle diese Formen aber für Aussagen vom $\forall$-Typ.

Die Umwandlung von Sätzen in Prosa-Form in die $\forall$-Form ist es eine sehr wichtige Übung, weil man dadurch gezwungen wird, die Angaben in der Prosa-Form in Voraussetzungen und Folgerungen zu trennen. Gelingt diese Trennung nicht, kann auch kein sinnvoller Beweis geführt werden!

Als Beispiel betrachten wir

Lemma 5.1. *Ist* (a_n) *eine reelle Folge mit Grenzwert* A *und gibt es* $C \in \mathbb{R}$ *und* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n \leq C$ *für alle* $n \geq N$*, dann gilt* $A \leq C$*.*

Zunächst sucht man alle Platzhalter, die in der Formulierung auftauchen, dann die Voraussetzungsbedingungen und dann die Folgerung. Man erhält die standardisierte Vorkursform

$\forall a, A, C, N$ **mit** a : reelleFolge; $A = \lim a$; $C \in \mathbb{R}; N \in \mathbb{N}$;
$\forall n$ **mit** $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ **gilt** $a_n \leq C$ **gilt** $A \leq C$;

Man erkennt in dieser Form gut, dass der Platzhalter A eigentlich überflüssig ist, weil er sich aus a bestimmen lässt. Eine äquivalente Form des Satzes ist daher

$\forall a, C, N$ **mit** a : konvergent; $C \in \mathbb{R}; N \in \mathbb{N}$; $\forall n$ **mit** $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ **gilt** $a_n \leq C$ **gilt** $\lim a \leq C$;

5.6 Definitionen

Jede Namenseinführung der Form $X := A$ dient dem Zweck, einen Ausdruck A durch einen Namen X abzukürzen. Eine solche Vereinbarung wird allgemein *Definition* genannt.

Handelt es sich bei dem Ausdruck um einen Begriff, so wird die Definition normalerweise besonders betont und der Ausdruck wird in einer umgangssprachlichen Hülle verpackt. Das sieht zum Beispiel so aus

Definition 5.2. *Eine Teilmenge* $M \subset \mathbb{R}$ *heißt induktiv, falls* $1 \in M$ *und* $\forall x \in M : (x+1) \in M$ *gilt. Die Menge aller induktiven Teilmenegen wird mit* $\mathcal{M}$ *bezeichnet.*

Analysiert man diese Passage, so stellt man fest, dass hier eigentlich zwei Definitionen vorgenommen wurden:

induktiv := M **mit** $M \subset \mathbb{R}; 1 \in M; \forall x$ **mit** $x \in M$ **gilt** $(x+1) \in M$ □;
$\mathcal{M} := \{M$ **mit** M : induktiv$\}$;

Spannender wird es bei Begriffen wie dem folgenden

Definition 5.3. *Sei* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *und* $k \in \mathbb{N}$*. Ein Punkt* $x \in (a,b)$ *heißt* k*-fache Nullstelle von* f*, wenn* f k*-mal differenzierbar ist mit* $f^{(0)}(x) = f^{(1)}(x) = \ldots = f^{(k-1)}(x) = 0$ *und* $f^{(k)}(x) \neq 0$*.*

Der hier definierte Begriff der k-fachen Nullstelle einer Funktion hängt nämlich von Parametern k und f ab. Deshalb sind im Text sowohl die Bedingungen an die Parameter versteckt als auch die Bedingungen an die Beispiele des Begriffs. Es handelt sich hier also eigentlich um die Definition einer begriffswertige Zuordnung

$$\text{mehrfacheNullstelle}(k, f \textbf{ mit } k \in \mathbb{N}; \exists a, b \textbf{ mit } a, b \in \mathbb{R};\ f \in C^k(a,b)\ \square) :=$$
$$x \textbf{ mit } x \in \text{Def}(f);\ f^{(k)}(x) \neq 0; \forall j \textbf{ mit } j \in \mathbb{N}_{<k} \textbf{ gilt } f^{(j)}(x) = 0\ \square;$$

Beim Umschreiben der Definition in die Vorkursform stellt man fest, dass die Platzhalter a, b in der Prosa-Form gar nicht genauer spezifiziert waren, so dass hier noch eine unbemerkte $\exists$-Aussage schlummerte.

Da es für das Arbeiten mit Begriffen (Stichwort Expansion, Kompression) entscheidend ist, die Beispielbedingung genau vor sich zu haben, ist es bei parameterabhängigen Begriffen gefährlich, in der Mischung der Begriffs- und Parameterbedingungen die Übersicht zu verlieren. Ein Umschreiben in die Vorkursform ist hier sehr hilfreich, um überhaupt zu erkennen, dass man vielleicht nicht weiß, welche Bedingung wohin gehört.

Sehr missverständlich sind übrigens parameterabhängige Begriffe, bei denen der Parameter im Namen gar nicht aufgeführt wird - man erkennt sie daran, dass das Aufschreiben der Definition in Vorkursform nicht möglich ist, weil eben Platzhalter benötigt werden, die nur als Argumente der eigentlich benötigten begriffswertigen Zuordnung ins Spiel kommen würden.

5.7 Zuordnungen

Zuordnungen treten außer in der offensichtlichen Form von Funktionen auch versteckt bei parameterabhängigen Begriffen auf, wie wir im Abschnitt über die Definitionen gesehen haben. Andere versteckte Formen sind indizierte Objekte wie

$$M_y := \{x \in \mathbb{R} : x^2 > y\} \quad \text{für } y > 0$$

Haben Sie sofort erkannt, dass es hier um die folgende Zuordnung geht?

$$M(y \textbf{ mit } y > 0) := \{x \textbf{ mit } x \in \mathbb{R}; x^2 > y\}$$

Auch bei der rekursiven Definition von Funktionen haben wir bereits darauf hingewiesen, dass die Angabe der gewünschten Bedingungen wie etwa

$$F(1) := 1;$$
$$F(2) := 1;$$
$$F(n+1) := F(n) + F(n-1);$$

nicht wirklich einer Definition entspricht, sondern nur die Belegungen spezifiziert, die notwendig sind, um den Rekursionssatz zu benutzen, der dann die Existenz einer Funktion garantiert, die die gewünschten Eigenschaften besitzt. Im vorliegenden Fall ist die so spezifizierte Funktion die bekannte *Fibonacci Folge*. Die saubere Definition verläuft so: Wir definieren zunächst die Menge $M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $s := (1, 1)$. Als Induktionsvorschrift setzen wir dann

$$f := \begin{cases} \mathbb{N} \times M & \to & M \\ (n, (u, v)) & \mapsto & (v, u + v) \end{cases}$$

Anwendung von Axiom (P5) im Modell der natürlichen Zahlen auf (M, f, s) zeigt nun, dass ein gewisser Begriff atomar ist, dessen einziges Beispiel wir als G definieren

$$\begin{aligned} G :=\downarrow a \ \textbf{mit} \ a : \mathbb{N} \to M; a(1) = s; \\ \forall n \ \textbf{mit} \ n \in \mathbb{N} \ \textbf{gilt} \ a(\varphi(n)) = f(n, a(n)) \ \square; \end{aligned}$$

Wir sehen nun, dass $G(1) = s$ gilt und $G(n + 1) = f(n, G(n))$, so dass die ersten Funktionswerte durch

$$G(1) = (1, 1); \quad G(2) = (1, 2); \quad G(3) = (2, 3); \quad G(4) = (3, 5); \ldots$$

Um an die Funktion F zu gelangen brauchen wir also nur noch die erste Komponente von G auszukoppeln

$$F(n \ \textbf{mit} \ n \in \mathbb{N}; (u, v) := G(n)) := u;$$

wobei die Einhaltung der ursprünglich geforderten Bedingungen noch induktiv zu beweisen wäre. Insgesamt sehen wir auch hier, dass die wenigen Zeilen eigentlich nur stellvertretend für eine deutlich längere Konstruktion stehen.

5.8 Schlussbemerkungen

Damit Sie die Fähigkeiten, die Sie sich im Vorkurs angeeignet haben, optimal in der Zukunft einsetzen können (sozusagen in freier mathematischer Wildbahn), sollen hier noch einige Ratschläge zusammengefasst werden. Die entscheidende Frage ist:
Was tun Sie, wenn ...

- ... Sie einer mathematischen Argumentation nicht folgen können?

Sie wissen, dass eine vollständige mathematische Argumentation sogar maschinell auf Korrektheit überprüft werden kann. Wenn Sie also der Argumentation nicht leicht folgen können, dann fehlen Beweisschritte oder Informationen zu den Beweisschritten. In jedem Fall ist der Autor der Argumentation von der kleinschrittigen

Gangart abgewichen und hat Schreibarbeit gespart und dadurch Verständnisarbeit beim Leser erzeugt. Zweifeln Sie also nicht an sich, sondern nehmen Sie die Situation als Anlass, die fehlenden Schritte einzufüllen (selbständig oder mit Hilfe), damit das vollständige logische Muster sichtbar wird.

- ... Sie den Sinn oder Nutzen eines Begriffs oder Objekts nicht verstehen?

Es is normal, dass Sie nicht in jedem neuen Begriff sofort bei der Definition seinen Sinn oder Nutzen erkennen. Begriffe werden typischerweise deshalb eingeführt, weil es vorher mehrere Beispiele gab, die sich in einem bestimmten Aspekt sehr ähnlich waren. Durch das Herausarbeiten der Gemeinsamkeiten der Beispiele entsteht dann die Begriffsbedingung - sie ist sozusagen der kleinste gemeinsame Nenner vieler Beispiele. Den Begriff zu *verstehen* bleibt also eng damit verbunden, genügend Beispiele kennenzulernen und das benötigt wiederum Zeit. Ein tieferes Verstehen tritt deshalb manchmal erst nach mehreren Jahren weiteren Studiums ein. Das momentane noch-nicht-Verstehen sollte Sie aber nicht daran hindern, mit dem neuen Begriff zu arbeiten, denn auch durch das Arbeiten mit einem Begriff lernt man ihn und seine Möglichkeiten besser kennen. Die dazu benötigten Techniken (Expandieren, Komprimieren) haben Sie ja bereits im Vorkurs kennengelernt.

- ... Sie vor einer Aufgabe sitzen und nicht wissen, was Sie machen sollen?

Im Vorkurs haben Sie Techniken kennengelernt, wie das Gelten von Aussagen unterschiedlichen Typs gezeigt werden kann. Die Informationen dazu ließen sich in einer zweiseitigen Tabelle zusammenfassen. Um auf diese Strukturierung zurückgreifen zu können, schreiben Sie die zu zeigende Aussage solange um (Abkürzungen auflösen), bis sie die Form einer Grundaussage aus Ihrer Liste hat. Der passende Beweisschritt aus der Tabelle zeigt ihnen nun, wie sie das Gelten nachweisen können, wobei in der Regel gewisse Vorbedingungen erfüllt sein müssen, damit der Schritt korrekt durchgeführt werden kann. Diese Vorbedingungen werden damit zu Ihren neuen Zielen, die sie nach dem gleichen Schema behandeln wie ihr ursprüngliches Ziel (also durch Auflösung von Abkürzungen in Standardform bringen, in der Tabelle einen passenden Beweisschritt wählen und dort wieder die Vorbedingungen erfüllen etc.). So verlagert sich ihr Ziel immer weiter und bringt Sie hoffentlich näher zu den geltenden Aussagen, die Sie durch die Voraussetzungen zur Verfügung haben (diese kann man normalerweise durch Auflösen von Abkürzungen und Expansionen auch noch anreichern). Das führen Sie solange fort, bis Sie ein Muster finden, dass die Voraussetzungen mit den Zielen so verbindet, so dass ein zulässiger Beweisverlauf entsteht. Wichtig ist auf jeden Fall: Halten Sie ihr Ziel stets vor Augen und lassen Sie sich nicht davon abbringen.

- ... Sie vor dem Vorlesungsstart noch Zeit haben?

Dann schauen Sie doch noch mal in die Anfangsabschnitte des Kurses und probieren Sie aus, ob Ihnen die Übungsaufgaben jetzt leichter fallen. Dann merken Sie selbst, was Sie bereits alles gelernt haben!

6 Ausblicke

Obwohl das erste Etappenziel des Vorkurses darin besteht, die Grundlagen der mathematischen Sprache zu erlernen, soll das dafür notwendige sehr kleinschrittige Vorgehen nicht die Sicht darauf verstellen, was später mit dem mathematischen Formalismus alles bewerkstelligt werden kann.

In diesem Abschnitt werden daher begleitend zum eigentlichen Kurs Ausblicke in die Gedankenwelt der Mathematik gegeben, indem Fragestellungen präsentiert und Resultate vorgestellt werden. Der Fokus liegt dabei gerade nicht auf den technischen Details sondern auf intuitiven Konzepten und Ideen, die Triebfedern für die notwendige Ausarbeitung der Details sind.

6.1 Für eine Handvoll Dollar

Für jede mathematische Aussage trifft zu: **Es gilt** A oder aber **Es gilt** $\neg A$. Während mathematische Aussagen A mit den vorhandenen Zuordnungen leicht zu bilden sind, ist die Beantwortung von A?, d.h. der Frage ob A oder das Gegenteil $\neg A$ gilt, oft sehr schwierig. Bei der Beantwortung muss man sich nämlich genau an die Regeln halten, nach denen der *Gilt*-Status einer Aussage nur durch erfolgreiche Nutzung spezieller Beweisschritte vergeben wird.

Beispiele: Milleniumsprobleme.

6.2 Teilbarkeit

Quersummenkalkül

6.3 Ebene Kurven

Aus der Schule kennen wir viele mathematische Kurven wie Parabeln, Hyperbeln Geraden, Exponentialkurve, Cosinus- und Sinuskurven etc. Beschrieben werden sie jeweils durch eine Funktionsvorschrift, die im Fall der Normalparabel die Form

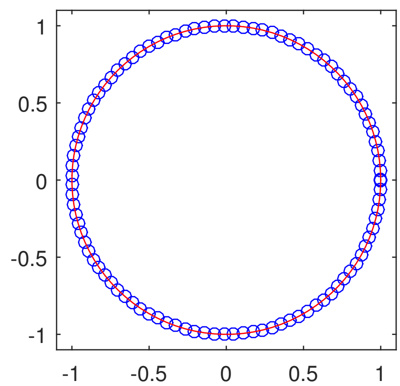
$f(x) = x^2$ hat. Möchte man die Kurve zeichnen, so wählt man sich mehrere x-Werte, berechnet die zugehörigen Funktionswerte und betrachtet die Paare als Koordinaten von Punkten, die man in einem kartesischen Koordinatensystem einträgt. Sind die x-Koordinaten dicht gewählt, ergibt sich ein scheinbar kontinuierlicher Kurvenverlauf.

Aber wie beschreibt man Kurven, die, egal wie man es dreht und wendet, zu einer x-Koordinate stets mehrere Punkte mit verschiedenen y-Koordinaten haben, wie etwa ein Kreis, eine Ellipse oder eine Spiralkurve?

Eine Möglichkeit wäre, die Kurve in mehrere Abschnitte zu unterteilen, wobei jeder Abschnitt entweder durch eine Funktion $x \mapsto f(x)$ oder durch eine Funktion $y \mapsto g(y)$ beschreibbar ist, weil zu jedem x-Wert bzw. jedem y-Wert wieder nur genau ein Punkt des Abschnitts gehört. Bei komplizierten Kurven kann das allerdings sehr unpraktisch werden.

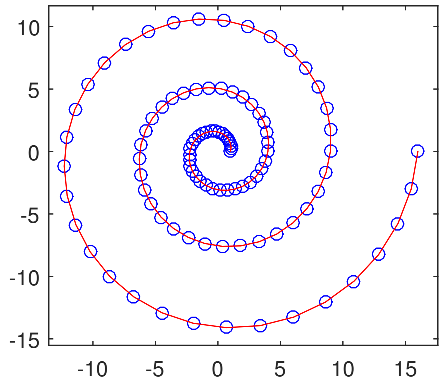
Ein allgemeinerer Zugang ergibt sich, wenn man einfach den Stift beobachtet, während man eine Kurve zeichnet: Zu jedem Zeitpunkt befindet sich die Stiftspitze an genau einem Punkt, d.h. die Koordinaten (x, y) der Stiftspitze können als Funktionen der Zeit betrachtet werden. Wir können allgemeine Kurven also durch ein Paar $t \mapsto (x(t), y(t))$ von Funktionen beschreiben.

Betrachten wir zunächst die Kreiskurve und stellen uns vor, wir würden den Stift so bewegen, dass der Winkel zwischen x-Achse und der Verbindungslinie Ursprung - Stiftspitze gleichmäßig größer würde. Bei einem Winkel t wäre der Stift dann am Punkt $(\cos(t), \sin(t))$, was auf die Beschreibung $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ führt.

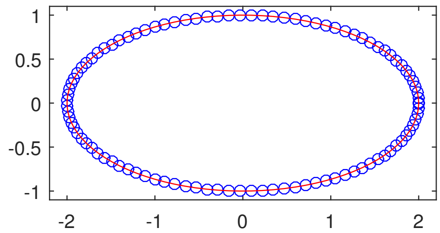


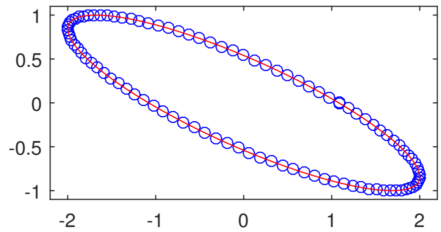
Multipliziert man beide Komponenten mit einem Faktor $r > 0$, dann ändert sich der Radius von 1 auf r. Interessanter wird es dagegen, wenn man den Radius während des Zeichnens immer größer werden lässt. So ergibt die Funktion $t \mapsto$

$(1+t)^2 \cdot (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ für $t \in [0,3]$ folgende Kurve

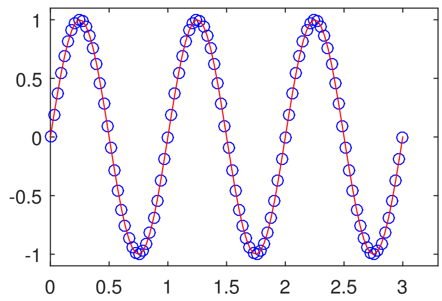


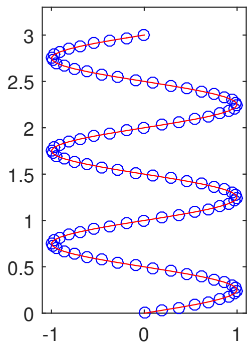
Ändert man den Faktor dagegen unterschiedlich für beide Komponenten, so verzerrt sich der Kreis zu einer Ellipse, die sich auch noch schrägstellt, wenn man zum Beispiel im Argument der Kosinusfunktion eine Konstante zu t hinzuaddiert.



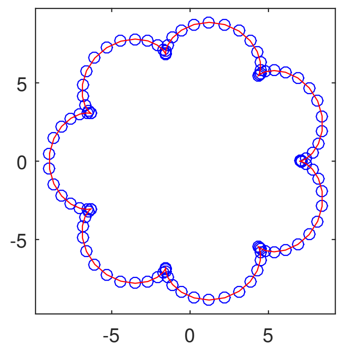


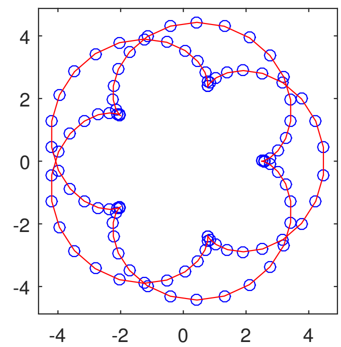
Nachdem wir nun eine allgemeine Form der Kurvenbeschreibung kennengelernt haben, stellt sich die Frage, wie Kurven, die in der Beschreibung $x \mapsto f(x)$ gegeben sind, in der neuen Form dargestellt werden können. Eine mögliche Antwort ist dazu $t \mapsto (t, f(t))$. Möchte man beispielsweise drei Perioden einer Sinuskurve zeichnen, so führt dies auf $t \mapsto (t, \sin(2\pi t))$ mit $t \in [0,3]$, wobei es auch sehr leicht ist, den Sinus um die y-Achse schlängeln zu lassen. Man muss nur die x- und y-Komponente vertauschen, d.h. die Funktion $t \mapsto (\sin(2\pi t), t)$ betrachten.



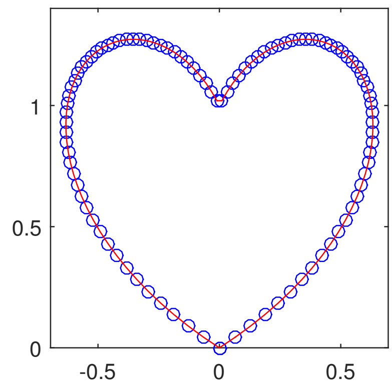


Ein interessanteres Kurvenverhalten ergibt sich aber, wenn beide Kurvenkomponenten nichtlineare Funktionen sind. Kombiniert man zum Beispiel Kreisbeschreibungen mit unterschiedlichen Radien und Umlaufgeschwindigkeiten, so ergeben sich blumenähnliche Kurvenformen. Die allgemeine Kurvenbeschreibung $t \mapsto a \cdot (\cos(t), \sin(t)) - (\cos(a \cdot t), \sin(a \cdot t))$ führt im Fall $a = 8$ bzw. $a = 7/2$ zu





Wählt man schließlich die Funktion $t \mapsto (-3t^2 + 2|t| + 1) \cdot (\sin(t), \cos(t))$ so ergibt sich eine herzförmige Kurve

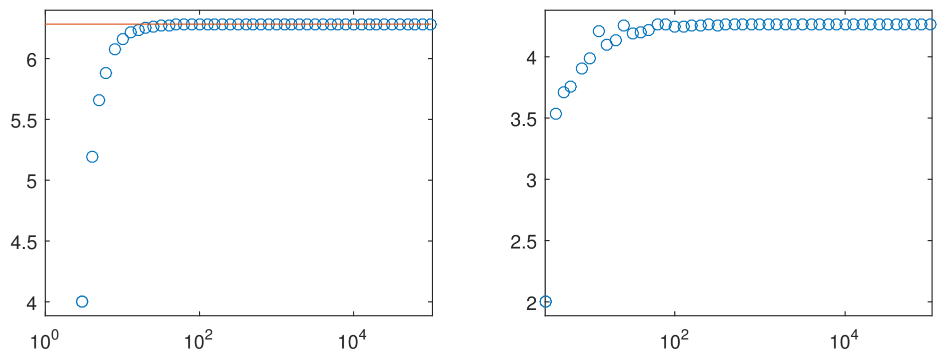


Alle diese Zeichnungen sind nach dem gleichen Muster angefertigt: Das Zeitintervall $I = [a, b]$ wird in N gleichgroße Teilintervalle zerlegt, wobei die Endpunkte mit $t_0 = a$, $t_1 = a + (b - a)/N$, $t_2 = a + 2 \cdot (b - a)/N$, $\ldots t_N = b$ bezeichnet werden. Dann werden die Funktionswerte $x(t_i)$ und $y(t_i)$ für alle Zeitpunkte berechnet und in einem kartesischen Koordinatensystem eingetragen. Anschließend werden aufeinanderfolgende Punkte jeweils mit Geradensegmenten verbunden.

Diese Herangehensweise legt auch nahe, wie man die *Länge* einer Kurve approximativ bestimmen könnte: Mit dem Satz des Pythagoras kann man die Länge l_i des Geradensegments zwischen den Punkten zu t_{i-1} und t_i bestimmen. Die approximative Gesamtlänge L_N entspricht dann der Summe aller Teillängen, d.h.

$$L_N = \sum_{i=1}^{N} l_i = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2)}$$

Führt man diesen Prozess für eine immer größer werdende Anzahl N von Zerlegungspunkten durch, dann erhält man eine Folge von Längenwerten L_N, die sich einer bestimmten Zahl immer mehr annähern. Diesen *Grenzwert* der Folge würde man dann die Länge der Kurve nennen. Am Beispiel des Einheitskreises sollten die Längenwerte sich der Zahl 2π annähern, was auch in der linken Grafik zu sehen ist. Da die N-Werte einen großen Bereich von 3 bis 100.000 durchlaufen ist die Achse hier logarithmisch skaliert. Die rechte Grafik zeigt die Längenfolge zur Herzkurve. Man sieht hieran, dass die Werte nicht unbedingt monoton gegen den Grenzwert konvergieren müssen.



6.4 Primzahlsatz

6.5 Mathematische Modelle

Der Grund, weshalb Menschen schon seit weit über tausend Jahren Mathematik betreiben, besteht darin, dass die Mathematik bei einem besseren Verständnis der Welt helfen kann. Besonders nützlich ist, wenn dieses Verständnis die Steuerung von Prozessen ermöglicht, oder eine Vorhersage in die ansonsten unsichere Zukunft erlaubt.

Das Grundprinzip ist dabei ganz einfach: Wenn wir feststellen, dass ein gewisser Ausschnitt der Welt durch Mechanismen mit klaren Regeln gesteuert wird, dann kann man versuchen, diese Regeln als mathematische Sätze zu formulieren, um sie als Grundannahmen einer virtuellen mathematischen Welt zu benutzen.

Die so entstehende (meistens abgespeckte oder auf lateinisch *abstrahierte*) Gedankenwelt nennen wir ein *mathematisches Modell*. In dieser Welt kann man mit dem Regelwerk der Mathematik untersuchen, ob bestimmte Aussagen gelten, die etwa die Zukunft oder die Steuerbarkeit eines Prozesses in der Kunstwelt betreffen. Antworten, die man hier erhält, können dann versuchsweise auf die Ausgangssituation in der wahren Welt übertragen werden. Waren die Modellannahmen gut, dann passen auch die Ergebnisse gut zum Original Original und das Modell wird dadurch nützlich.

Diesen Modellierungsprozess können wir an dieser Stelle noch nicht für kompliziertere Regelwerke vorführen, weil zu deren Beschreibung entsprechend komplexe mathematische Objekte benötigt werden. Um dennoch ein Beispiel geben zu können betrachten wir ein Geflecht von Aussagen, die von drei Personen in der wahren Welt stammen könnten, die sich gegenseitig der Lüge bezichtigen.

Alice behauptet: *Bob lügt.* Bob behauptet: *Carmen lügt.* Carmen behauptet: *Alice und Bob lügen.*

Um herauszufinden, wer von den Personen tatsächlich lügt, bauen wir eine mathematische Kunstwelt auf, in der wir sauber argumentieren können. Dazu ist es wichtig, alle Annahmen über die Objekte, mit denen die Situation beschrieben wird, mathematisch präzise zu formulieren. Die Akteure der Geschichte (also Alice, Bob und Carmen, aber auch die Aktionen *lügen* und *behaupten*) werden zu Platzhaltern des Modells, die in ganz bestimmter Weise miteinander verwoben sind.

Wir notieren das Modell etwa so:

Modell Lügengeschichte
benutzt Alice, Bob, Carmen, Lügt, Behauptet **mit**
Alice, Bob, Carmen : Objekt;
Person := P **mit** $(P = \text{Alice}) \vee ((P = \text{Bob}) \vee (P = \text{Carmen}))$ □;
Lügt : Zuordnung;
Argument(Lügt) = Person;
$\forall P$ **mit** P : Person **gilt** Lügt(P) : Wahrheitswert;
Behauptet : Zuordnung;
Argument(Behauptet) = P, A **mit** P : Person; A : Wahrheitswert □;
$\forall P, A$ **mit** (P, A) : Argument(Behauptet) **gilt**
Behauptet(P, A) : Wahrheitswert;
$\forall P, A$ **mit** (P, A) : Argument(Behauptet);
Lügt(P); Behauptet(P, A) **gilt** $\neg A$;
$\forall P, A$ **mit** (P, A) : Argument(Behauptet);
$\neg$Lügt(P); Behauptet(P, A) **gilt** A;
Behauptet(Alice,Lügt(Bob));
Behauptet(Bob,Lügt(Carmen));
Behauptet(Carmen,Lügt(Alice) $\wedge$ Lügt(Bob));
□

Führen wir als Abkürzung für die Zuordnungsergebnisse Behauptet(P, A) und Lügt(P) die Infix-Schreibweise (P behauptet A) bzw. die Postfix-Schreibweise (lügt P) ein, dann finden wir uns mit dem Modellrahmen gerade in der Situation von Aufgabe 2.3 wieder.

Dort haben wir bereits damit begonnen, ausgehend von den Modellannahmen (also *im Modell*) bestimmte Konsequenzen abzuleiten

(Bob lügt) $\Rightarrow$ $\neg$(Carmen lügt);
$\neg$(Bob lügt) $\Rightarrow$ (Carmen lügt);
(Alice lügt) $\Rightarrow$ $\neg$(Bob lügt);
$\neg$(Alice lügt) $\Rightarrow$ (Bob lügt);
(Carmen lügt) $\Rightarrow$ $\neg$((Alice lügt) $\wedge$ (Bob lügt));
$\neg$(Carmen lügt) $\Rightarrow$ ((Alice lügt) $\wedge$ (Bob lügt));

Um nun herauszufinden, welche Person tatsächlich lügt, können wir wieder den systematischen Weg beruhend auf Fallunterscheidungen beschreiten, indem wir alle denkbaren Kombinationen für die Wahrheitswerte

$A :=$ Alice lügt; $B :=$ Bob lügt; $C :=$ Carmen lügt;

untersuchen. Betrachten wir beispielhaft die erste Kombination, in der wir davon ausgehen, dass alle Aussagen A, B, C falsch sind, d.h. dass alle Personen nicht lügen. Wenden wir die Implikation $\neg$(Alice lügt) $\Rightarrow$ (Bob lügt) an, so sehen wir, dass *Bob lügt* gilt und damit $B =$ wahr zutrifft. Da im betrachteten Fall aber nach Annahme auch $B =$ falsch vorliegt, lässt sich wahr = falsch ableiten, so dass ein Widerspruch auftritt.

Nach unserer Merkregel zur Widersprüchlichkeit ist nun jede Aussage wahr, d.h. wir können in diesem Fall keinen nützlichen Hinweis auf eine mögliche Lösung finden. Für einen späteren Beweis merken wir uns daher nur, dass der Fall einen Widerspruch erzeugt.

In dieser Weise können wir nun alle Wertekombination von A, B, C durcharbeiten. Die Anwendung der jeweils passenden Implikationen liefert dann Wahrheitswerte für B, C sowie $A \wedge B$. Passen diese nicht zu den Annahmen, so tritt ein Widerspruch ein. Als Ergebnis ergibt sich

	A	B	C	B	C	$A \wedge B$
1	f	f	f	w	w	w
2	f	f	w	w	w	f
3	f	w	f	w	f	w
4	f	w	w	w	f	f
5	w	f	f	f	w	w
6	w	f	w	f	w	f
7	w	w	f	f	f	w
8	w	w	w	f	f	f

Wir sehen, dass die Kombinationen 1,2,7,8 einen Widerspruch mit Aussage B liefern, und zusätzlich 4,5 einen Konflikt in C ergeben. Im Fall 3 ist A falsch und

B wahr, was im Konflikt mit der Wahrheit von $A \wedge B$ steht. Der verbleibende Fall Nummer 6 ist schließlich der einzige, der keinen Widerspruch beinhaltet. Unsere Vermutung ist daher:

Alice lügt; $\neg$(Bob lügt); Carmen lügt;

bzw. in Kurzform

Antwort $:= A \wedge (\neg B) \wedge C$;

Eine Möglichkeit (**Es gilt** Antwort) zu beweisen ist eine systematische Fallunterscheidung (mit 7 Fallunterscheidungsschritten) durchzuführen, bei der letztlich alle möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte für A, B, C betrachtet werden. Offensichtlich gilt *Antwort* im Fall 6 und in allen anderen Fällen tritt ein Widerspruch auf. Da in diesen Fällen jede Aussage gilt, können wir in allen Fällen zeigen, dass *Antwort* gilt. Die Fallunterscheidung ist damit erfolgreich durchgeführt, so dass unsere *Antwort* gilt.

Eine elgantere aber weniger systematische Methode besteht darin, eine geschickte Auswahl von Fällen zu verfolgen:

In einem Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass $\neg A$ gilt, d.h. dass Alice nicht lügt. Wir können nun eine Implikation aus unserer Liste anwenden und erhalten (Bob lügt) also B. Anwenden einer weiteren Implikation zeigt (Carmen lügt nicht) also $\neg C$ und in der gleichen Weise schließlich (Alice lügt) und (Bob lügt) also $A \wedge B$. Anwendung des Satzes $\forall U, V$ **mit** U, V : Wahrheitswert; $U \wedge V$ **gilt** U auf (A, B) ergibt nun A. Mit dem Satz $\forall Z$ **mit** Z : Wahrheitswert; $Z; \neg Z$ **gilt** (wahr = falsch) angewendet auf A finden wir nun die widersprüchliche Situation (wahr = falsch) $\lightning$ Damit gilt die Negation der Annahme, also $\neg\neg A$.

Anwendung des Satzes $\forall Z$ **mit** Z : Wahrheitswert **gilt** $(\neg\neg Z) = Z$ auf A ergibt nun $(\neg\neg A) = A$, so dass mit einer Ersetzung folgt, dass A gilt. Gehen wir nun wieder durch sukkzessive Anwendung durch unsere Implikationen, so folgt $\neg B$ und C. Dass die Antwort gilt, benötigt jetzt noch eine zweimalige Anwendung des Satzes $\forall U, V$ **mit** U, V : Wahrheitswert; $U; V$ **gilt** $U \wedge V$, zuerst auf $(\neg B, C)$ und dann auf $(A, (\neg B) \wedge C)$. Insgesamt erhalten wir damit **Es gilt** Antwort.

Aufgabe 6.1. Wir gehen davon aus, dass die Objekte Alice, Bob und Carmen gegeben sind. Definieren Sie nun den Begriff *weiblich*, dessen Beispiele Alice und Carmen sind. Können Sie beweisen, dass $\neg$(Bob : weiblich) gilt?

Aufgabe 6.2. Zeigen Sie ausgehend von der Definition des Begriffs *Person* in Abschnitt 2.4, dass $\neg$(Waldi : Person) gilt unter den Voraussetzungen

Waldi $\neq$ Alice; Waldi $\neq$ Bob; Waldi $\neq$ Carmen;

Aufgabe 6.3. In Fortführung der Lügner-Aufgaben nehmen wir an, dass jede Person zu jeder Aussage Stellung nimmt, d.h.

$\forall P, A$ **mit** P : Person; A : Wahrheitswert **gilt**
$(P$ behauptet $A) \vee (P$ behauptet $\neg A)$

Zeigen Sie dass es dann unter den Personen keine Aussageverweigerer gibt, d.h.

$\neg\exists$Verweigerer

wobei

Verweigerer := P **mit** P : Person; $\forall A$ **mit** A : Wahrheitswert **gilt** $\neg(P$ behauptet $A)$ $\square$

und dass folgende Satzaussagen gelten

$\forall P$ **mit** P : Person **gilt** $(P$ lügt$) \Leftrightarrow (P$ behauptet falsch$)$;
$\forall P$ **mit** P : Person **gilt** $\neg(P$ lügt$) \Leftrightarrow (P$ behauptet wahr$)$;

Gelten auch folgende Satzaussagen?

$\forall P, A, B$ **mit** P : Person; A, B : Wahrheitswert;
P behauptet $(A \wedge B)$ **gilt** $(P$ behauptet $A) \wedge (P$ behauptet $B)$;
$\forall P, A$ **mit** P : Person; A : Wahrheitswert **gilt**
$(P$ behauptet $A) \Leftrightarrow \neg(P$ behauptet $\neg A)$;

Aufgabe 6.4. Zeigen Sie, dass jede Person behauptet, dass sie nicht lügt, sofern die Regel aus Aufgabe 6.3 gilt, dass jede Person zu jeder Aussage Stellung nimmt.

Aufgabe 6.5. In einer neuen Runde behauptet Bob, dass Alice behauptet nicht zu lügen und dass er auch nicht lügt, während Carmen sagt, dass sie die einzige von ihnen ist, die nicht lügt. Wer lügt hier, wenn wir wieder voraussetzen, dass jede Person zu jeder Aussage Stellung nimmt?

6.6 Unzählbares zählen

6.7 Funktionen mit mehreren Argumenten

6.8 Verschlüsselung

6.9 Fuchs und Hase

6.10 Primzahlen in der Natur

A Zusammenfassung der Sprachregeln

A.1 Korrekte Ausdrücke

Die folgenden Regeln kontrollieren das korrekte Aufschreiben von Ausdrücken. Gleichzeitig sorgen Sie dafür, dass gewisse ::-Aussagen gelten. In Beweisen müssen die Regeln nicht angegeben werden. Der Beweisautor und der Beweisleser kontrollieren sie sozusagen im Hintergrund.

Es gilt X :: Begriff, für alle X aus der Liste Zuordnung, Begriff, Objekt.

Gilt $u : X$, für ein X aus der Liste Zuordnung, Begriff, Objekt, dann gilt auch $u :: X$.

Es gilt wahr : Objekt, falsch : Objekt.

Gilt $x :: A$ dann gilt auch x :: Objekt.

Steht x für einen Platzhalternamen, dann gilt x :: Objekt in der Umgebung, wo der Platzhalternamen benutzt werden darf.

Gilt F :: Zuordnung, dann gilt auch Argument(F) :: Begriff.

Gilt F :: Zuordnung und x : Argument(F) oder x :: Argument(F), dann gilt auch $F(x)$ :: Objekt.

Es gilt (x **mit** B □) :: Begriff, wenn x eine kommagetrennte Liste von paarweise verschiedenen Namen und B eine strichpunktgetrennte Liste von Wahrheitswerten ist.

Gilt u : (x **mit** B □), dann gilt auch u :: (x **mit** B □).

Gilt u :: Objekt und (x **mit** B □) :: Begriff, dann gilt (u :: (x **mit** B □)) : Wahrheitswert.

Es gilt ((x **mit** B) $\mapsto Y \ldots :: C$) :: Zuordnung, wenn (x **mit** B □) :: Begriff gilt und $Y :: C$ unter den Annahmen B gilt (entsprechend mit $\ldots : C$). Argument((x **mit** B) $\mapsto Y \ldots :: C$) ist dann eine Abkürzung für (x **mit** B □). Gilt u :: (x **mit** B □), dann gilt $F(u) :: C$ (bzw. $F(u) : C$).

Zu den grundlegenden Zuordnungen stehen jeweils abkürzende Symbole zur Verfügung. Die Bedingungen an die Argumente und die Typinformation zu den Ergebnissen dieser Zuordnungen werden in folgender Tabelle zusammengefasst.

Abkürzung	**Argumentbedingung**	**Ergebniseigenschaft**
$A = B$	A, B :: Objekt	: Wahrheitswert
$x : B$	x :: Objekt; B :: Begriff	: Wahrheitswert
$\exists B$	B :: Begriff	: Wahrheitswert
$\downarrow B$	B :: Begriff; $\exists! B$	: B
$E \wedge F$	E, F : Wahrheitswert	: Wahrheitswert
$E \vee F$	E, F : Wahrheitswert	: Wahrheitswert
$E \Rightarrow F$	E, F : Wahrheitswert	: Wahrheitswert
$\neg F$	F : Wahrheitswert	: Wahrheitswert

Zum Verständnis dieser und der nachfolgenden Tabellen sind folgende Begriffe und Zuordnungen wichtig:

Wahrheitswert := A **mit** $(A =$ wahr$) \vee (A =$ falsch$)$ □;
Spezialisierung(A, B **mit** A, B :: Begriff) := $\forall x$ **mit** $x : A$ **gilt** $x : B$;
Eindeutigkeit(A **mit** A :: Begriff) := $\forall u, v$ **mit** $u, v : A$ **gilt** $u = v$;
atomar := A **mit** A :: Begriff; $\exists A$; Eindeutigkeit(A) □;
Abbildung(A, B **mit** A, B :: Begriff) := F **mit**
  F :: Zuordnung; Argument(F) = A; $\forall x$ **mit** $x : A$ **gilt** $F(x) : B$ □;

Als Infix-Notation wählen wir im Folgenden $A \sqsubset B$ für Spezialisierung(A, B) und sagen A *spezialisiert* B. Außerdem schreiben wir statt Eindeutigkeit(A) kurz $!A$, was wir als *es gibt höchstens ein Beispiel von* A aussprechen. Als Abkürzung von A : atomar benutzen wie die Zusammenziehung der beiden Symbole $\exists$ und ! zu $\exists! A$ und sagen *es gibt genau ein Beispiel zu* A.

A.2 Axiome

(A1)	wahr
(A2)	(falsch $\wedge$ falsch) $=$ falsch
(A3)	(falsch $\wedge$ wahr) $=$ falsch
(A4)	(wahr $\wedge$ falsch) $=$ falsch
(A5)	(wahr $\wedge$ wahr) $=$ wahr
(A6)	(falsch $\vee$ falsch) $=$ falsch
(A7)	(falsch $\vee$ wahr) $=$ wahr
(A8)	(wahr $\vee$ falsch) $=$ wahr
(A9)	(wahr $\vee$ wahr) $=$ wahr
(A10)	($\neg$ wahr) $=$ falsch
(A11)	($\neg$ falsch) $=$ wahr
(A12)	$\forall A$ **mit** A **gilt** $A =$ wahr;
(A13)	$\forall x$ **mit** $x ::$ Objekt **gilt** $x = x$;
(A14)	$\forall A, B$ **mit** $A, B ::$ Begriff; $A \sqsubset B; B \sqsubset A$ **gilt** $A = B$;
(A15)	$\forall F, G$ **mit** $F, G ::$ Zuordnung; Argument$(F) =$ Argument(G); $\forall x$ **mit** $x :$ Argument(F) **gilt** $F(x) = G(x)$ **gilt** $F = G$;
(A16)	wahr : Objekt;
(A17)	falsch : Objekt;
(A18)	$\forall u$ **mit** $u :$ Objekt **gilt** (x **mit** $x = u$ $\square$) : Begriff;
(A19)	$\forall A, B$ **mit** $A, B :$ Begriff **gilt** (x **mit** $(x : A) \vee (x : B)$ $\square$) : Begriff;
(A20)	$\forall A, B$ **mit** $A ::$ Begriff; $B :$ Begriff; $A \sqsubset B$ **gilt** $A :$ Begriff;
(A21)	$\forall F$ **mit** $F ::$ Objekt **gilt** ($F :$ Zuordnung) $= \exists A, B$ **mit** $A, B :$ Begriff; $F ::$ Abbildung(A, B) $\square$;
(A22)	$\forall A, B, a, b$ **mit** $A, B :$ Begriff; $a : A; b : B$ **gilt** $(a, b) : (u, v$ **mit** $u : A; v : B$ $\square$);

A.3 Schritte

Kompression	
Ich möchte zeigen	$x :: B$
Vorher zu tun	Alle Aussagen aus der Definition von B die beim Ersetzen des Platzhalters durch das Objekt x entstehen, müssen nachgewiesen werden.
Beweistext	Wir erhalten $x :: B$ durch Kompression.

Kompression	
Ich möchte zeigen	$x : B$
Vorher zu tun	$x :: B$ muss komprimierbar sein und eine Aussage der Form $x : C$ muss gelten.
Beweistext	Wir erhalten $x : B$ durch Kompression.

Existenznachweis	
Ich möchte zeigen	$\exists B$
Vorher zu tun	Nachweis einer Aussage der Form $x : B$ mit einem geeigneten x.
Beweistext	Da $x : B$ gilt, erhalten wir $\exists B$.

direkter Beweis	
Ich möchte zeigen	$A \Rightarrow B$
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage B unter der Annahme, dass A gilt. Diese Annahme ist bis zur Endemarke $\blacksquare$ gültig.
Beweistext	In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass A gilt ... und somit gilt B $\blacksquare$

direkter Beweis	
Ich möchte zeigen	$\forall x$ **mit** B **gilt** F
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage F unter der Annahme, dass die Objekte aus der Liste x zur Verfügung stehen und die Aussagen aus der Liste B gelten. Die Objekte und die Annahmen sind bis zur Endemarke $\blacksquare$ verfügbar.
Beweistext	In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass Objekte x gegeben sind, für die B gilt ... womit schließlich F gilt $\blacksquare$

Widerspruchsbeweis	
Ich möchte zeigen	$\neg A$
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage (wahr = falsch) unter der Annahme, dass A gilt. Diese Annahme ist bis zur Endemarke $\lightning$ gültig.
Beweistext	In einem Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass A gilt ... $\lightning$ Also gilt $\neg A$.

Gegenbeispiel	
Ich möchte zeigen	$\neg\forall x$ **mit** B **gilt** F
Vorher zu tun	Finden eines Objekts x, so dass B erfüllt ist und $\neg F$ gilt.
Beweistext	x ist ein Gegenbeispiel zu $\forall x$ **mit** B **gilt** F.

Ersetzung	
Wobei hilft mir	$A = B$
zum Nachweis von	V, wenn es eine geltende Aussage U gibt, aus der durch selektives Austauschen von A und B die Aussage V entsteht. (Ausnahmen: in Ausdrücken der Form $u :: B$ darf B nur ersetzt werden, wenn $u : B$ gilt. In Ausdrücken $F(x)$ darf F nur ersetzt werden, wenn $x : \text{Argument}(F)$ gilt.)
Beweistext	Wegen $A = B$ und U gilt auch V.

Anwendung	
Wobei hilft mir	$A \Rightarrow B$
zum Nachweis von	B, wenn die Aussage A gilt.
Beweistext	Da A gilt zeigt die Anwendung von $A \Rightarrow B$, dass B gilt.

Anwendung	
Wobei hilft mir	$\forall x$ **mit** B **gilt** F
zum Nachweis von	F mit x ersetzt durch u, wenn u anstelle von x die Bedingungen B erfüllt.
Beweistext	Anwendung von $\forall x$ **mit** B **gilt** F auf u zeigt, dass ... gilt.

Expansion	
Wobei hilft mir	$x :: B$
zum Nachweis von	den Aussagen aus der Bedingung B mit den Platzhaltern ersetzt durch x.
Beweistext	Expansion von $x :: B$ zeigt ...

Expansion	
Wobei hilft mir	$x : B$
zum Nachweis von	den Aussagen aus der Bedingung B mit den Platzhaltern ersetzt durch x.
Beweistext	Expansion von $x : B$ zeigt ...

Beispielwahl	
Wobei hilft mir	$\exists B$
zum Nachweis von	einer Aussage F, die unter der Annahme eines Beispiels zu B bewiesen werden kann.
Beweistext	Sei x ein Beispiel von B ... also gilt F.

Fallunterscheidung	
Wobei hilft mir	$A \vee B$
zum Nachweis von	einer Aussage F, die sowohl unter der Annahme A bewiesen werden kann, als auch unter der Annahme B.
Beweistext	In einer Fallunterscheidung basierend auf $A \vee B$ betrachten wir Fall A … dann gilt F. Im Fall B folgt … also wieder F. Insgesamt gilt damit F.

Gegenbeispielwahl	
Wobei hilft mir	$\neg\forall x$ **mit** B **gilt** F
zum Nachweis von	einer Aussage G, die unter der Annahme eines Objekts bewiesen werden kann, das B und $\neg F$ erfüllt.
Beweistext	Sei u ein Gegenbeispiel zu $\forall x$ **mit** B **gilt** F … also gilt G ∎