

Zum Umgang mit Definitionen

Definitionen dienen der Zusammenfassung bzw. Abkürzung von komplizierten Sachverhalten mit einem (möglichst suggestiven) Symbol oder Wort.

Im Zusammenhang mit Definitionen treten daher prinzipiell zwei Situationen auf

- (1) In einem konkreten Sachverhalt stellt sich die Frage, ob die Definition greift, so dass mit der Abkürzung weiter argumentiert werden kann.
- (2) Eine Voraussetzung oder das Ergebnis eines mathematischen Satzes garantiert, dass die Definition greift. Dann treffen alle in der Abkürzung versteckten Inhalte zu und können zur weiteren Argumentation verwendet werden.

Schauen wir uns das Beispiel einer Definition an, die mehrere Eigenschaften zu einer neuen Eigenschaft zusammenfasst.

Definition 1. *Sei V ein Vektorraum und $B \subset V$. Die Menge B heißt Basis von V , wenn B linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist.*

Hier wird die neue Eigenschaft *ist Basis von* als Abkürzung von einigen anderen Eigenschaften eingeführt. Will man entsprechend obigem Punkt (1) für eine bestimmte Menge $\{(3, 2), (1, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$ nachprüfen, ob das Label *ist Basis von* vergeben werden darf, dann sollte man sich die Definition als Checkliste vorstellen:

Checkliste:	<i>ist Basis von</i>
Eingabe:	B, V
Frage 1:	Ist $B \subset V$? ☐
Frage 2:	Ist V ein Vektorraum? ☐
Frage 3:	Ist B linear unabhängig in V ? ☐
Frage 4:	Ist B ein Erzeugendensystem von V ☐
Ausgabe:	B ist Basis von V ☐

Zur Überprüfung muss zunächst die Eingabe sauber identifiziert werden, also

$$B = \{(3, 2), (1, 2)\}, \quad V = \mathbb{R}^2.$$

Danach werden die Fragen in der Liste der Reihe nach bearbeitet, was üblicherweise das Abarbeiten weiterer Checklisten erfordert (hier der Checklisten für *Vektorraum*, $\subset$, *linear unabhängig*, *Erzeugendensystem*). Wird eine Frage positiv beantwortet, gibt es einen Haken im zugehörigen Kästchen. Im anderen Fall kann man mit der Checkliste aufhören, da das untere Kästchen nur dann einen Haken bekommt, wenn alle Kästchen darüber einen Haken haben. Geht die Überprüfung durch, so kann man danach für die konkreten Mengen B und V die Eigenschaft *ist Basis von* verwenden.

Selbst wenn in einer solchen Checkliste einige Fragen leichter zu beantworten sind als andere, so sind doch alle Antworten gleich wichtig für den Gesamthaken. Der Versuchung, über gewisse Fragen wegen vermeindlicher Banalität nicht einmal nachzudenken, müssen Sie auf jeden Fall widerstehen.

Weiß man entsprechend Punkt (2), dass $B = \{b_0, \dots, b_n\}$ eine Basis von $V = \Pi_n$ ist, dann entspricht die Definition einer Gebrauchsanleitung oder einer Produktbeschreibung:

Produktbeschreibung:	B ist Basis von V	
Eigenschaft 1:	$B \subset V$	☒
Eigenschaft 2:	V ist ein Vektorraum	☒
Eigenschaft 3:	B ist linear unabhängig in V	☒
Eigenschaft 4:	B ist ein Erzeugendensystem von V	☒

Alle zugesicherten Eigenschaften sind nun in der weiteren Argumentation verwendbar.