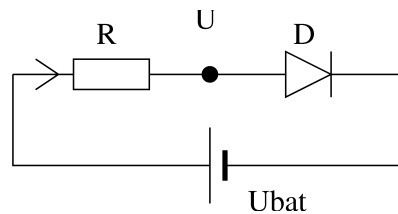


Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 02

Aufgabe 1: ZWS und Bisektionsverfahren

Gegeben sei das unten aufgeführte Schaltbild: Mit R bzw. D bezeichnen wir den Widerstand bzw. eine Diode. Die Strom-Spannungs-Kennlinie der Diode D sei mit $\alpha = 2,29 \cdot 10^{-9} A$ und $\beta = 22,6 \frac{1}{V}$ gegeben durch $I = \alpha e^{\beta U}$.



- Leiten Sie eine Gleichung $F(U) = U_{bat}$ für die Spannung U am Punkt zwischen Widerstand und Diode her. (Zur Kontrolle können Sie Ihr Ergebnis mit der richtigen Lösung auf der Homepage zur Vorlesung vergleichen)
- Zeigen Sie unter Verwendung von Monotonie und dem Zwischenwertsatz, dass die Gleichung $F(U) = U_{bat}$ für jedes $U_{bat} \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung besitzt.
- Berechnen Sie im konkreten Fall $R = 1k\Omega$ und $U_{bat} = 2,5V$ die Spannung U mit Hilfe des Bisektionsverfahrens auf 2 Stellen genau.

Aufgabe 2: Raum-Zeit-Koinzidenz

Kann es sein, dass ein Student, der morgens um 8.00 Uhr mit dem Fahrrad zur Uni fährt und abends um 20.00 Uhr exakt dieselbe Strecke wieder nach Hause fährt, an ein und demselben Punkt dieser Strecke sowohl morgens als auch abends auf seiner Uhr dieselbe Position seiner Uhrzeiger vorfindet? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch!

Aufgabe 3: Inverse Funktion einer stetigen Funktion

Gegeben sei die Menge

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geq 0 ; u^3 \leq v \leq 2u^3 \text{ für } 0 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2 \text{ für } u \geq 1\}$$

- (a) Skizzieren Sie die Menge A.
- (b) Gegeben sei $H : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \longmapsto (x, y)$ mit $x = \frac{v}{u}$ und $y = \frac{v}{u^2}$ für $(u, v) \in A$ mit $u, v > 0$ und $H(0, 0) := (0, 0)$. Zeigen Sie, dass die Funktion H im Punkt $(0, 0)$ stetig ist.
- (c) Bestimmen Sie die Inverse G zu H und zeigen Sie, dass G im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig ist.

Aufgabe 4: Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Exponentialfunktion ist für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert durch $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$.
Beweisen Sie folgende Eigenschaften von Exponential- und Logarithmusfunktion:

Unter Verwendung des Cauchy-Produktes für absolut konvergente Reihen:

- (a) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Unter Verwendung von (a) und den entsprechend vorherigen Teilaufgaben:

- (b) $\exp(0) = 1$
- (c) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- (d) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt $\exp(x) < \exp(y)$
- (e) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$
- (f) $\ln(1) = 0$
- (g) $\ln(x) > 0$ für alle $x > 1$
- (h) Für $x, y > 0$ mit $x < y$ gilt $\ln(x) < \ln(y)$

Allgemeine Potenzen:

Mit Hilfe der Exponentialfunktion und des Logarithmus kann man für ein beliebiges $a > 0$ und ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ die Potenz a^x definieren:

$$a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$$

- (i) Beweisen Sie unter Verwendung dieser Definition, dass die Rechenregeln für das Potenzieren mit natürlichen Zahlen auch für beliebige reelle Potenzen erhalten bleiben, d.h. das für beliebige $a, b > 0$ und beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ für $p, q \in \mathbb{N}$