Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 30.04.2010

Abgabe: 07.05.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 03

Aufgabe 1: innere Punkte, Randpunkte

Bestimmen Sie anhand der Definition aus der Vorlesung alle Randpunkte und alle inneren Punkte

(a) des Intervalls $(0,1] \subset \mathbb{R}$

(b) der Kugel $B_r(x)$ mit Radius $r > 0$ um den Punkt x eines norm. Raumes X

(c) der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

(d) von $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Aufgabe 2: Schnitte & Vereinigungen von Mengen

Zeigen Sie:

(a) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

(b) Endliche Schnitte offener Mengen sind offen.

(c) Unendliche Schnitte offener Mengen müssen nicht offen sein.

(d) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(e) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(f) Unendliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

Aufgabe 3: offene und abgeschlossene Mengen

Es sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie:

(a) Eine Menge M ist genau dann abgeschlossen, wenn jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ihren Grenzwert in M hat.

(b) Eine Menge M ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement M^C offen ist.

(c) Für $x \in X$ und $r > 0$ ist $B_r(x)$ offen, $\overline{B_r(x)}$ hingegen abgeschlossen.

(d) Das Innere $\overset{o}{M}$ einer Menge M ist offen, der Abschluss $\overline{M}$ einer Menge M ist abgeschlossen.

(e) Konstruieren Sie eine Menge, die offen und abgeschlossen ist.

Aufgabe 4: kompakte Mengen

Zeigen Sie:

(a) Kompakte Mengen sind beschränkt.
(Hinweis: durch Widerspruch)

(b) Kompakte Mengen sind abgeschlossen.
(Hinweis: 3(a))

(c) Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ sind kompakt.
(Hinweis: nutzen Sie, dass jede reelle Folge eine monotone Teilfolge hat)

(d) Mehrdimensionale Würfel $[-r, r] \times \cdots \times [-r, r] = \overline{B_r(0)}$ in $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty\right)$ sind kompakt. (Hinweis: Nutzen Sie (c) für jede Komponente)

(e) Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.
(Hinweis: Definitionen benutzen!)

(f) Satz von Heine-Borel:
Sei K eine beschränkte, abgeschlossene Menge in $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty\right)$, dann ist K kompakt. (Hinweis: benutzen Sie (d) und (e))