



Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 07.05.2010

Abgabe: 14.05.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 04

Aufgabe 1: Lineare, invertierbare Abbildungen

Sei V ein K -Vektorraum und $(W, \|\cdot\|_W)$ ein normierter Raum über K . Zeigen Sie, dass dann mit Hilfe einer linearen, invertierbaren Abbildung $L : V \longrightarrow W$ durch

$$\|x\|_V := \|Lx\|_W$$

eine Norm auf V definiert wird.

Aufgabe 2: Äquivalenz von Normen

Zeigen Sie: Alle Normen auf einem endlich dimensionalen Raum sind äquivalent.

(Hinweis: Wählen Sie zwei Normen $\|\cdot\|_\star$ und $\|\cdot\|_\heartsuit$ auf einem beliebigen endlich dimensionalen Raum W mit $\dim(W) = n < \infty$. Setzen Sie $V = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, benutzen Sie Aufgabe 1 mit der Koordinatenabbildung L bezüglich einer Basis $b_1, \dots, b_n$ von W und schließen Sie mit dem Satz aus der Vorlesung über die Äquivalenz von Normen auf dem $\mathbb{R}^n$)

Aufgabe 3: Lineare Abbildungen und Stetigkeit

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Räume über K , $\dim(V) = n < \infty$ und $A : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Abbildung A unter diesen Voraussetzungen Lipschitz-stetig ist.

(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1 und Aufgabe 2)

Aufgabe 4: Operatornorm

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum mit Vektornorm $\|\cdot\|$. Dann wird auf dem entsprechenden Vektorraum $\mathbb{K}^{n \times n}$ der $n \times n$ -Matrizen durch

$$\|A\|_{Op} := \max\{\|Ax\| : x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|x\| = 1\}$$

eine Matrixnorm definiert, die sogenannte Operatornorm. Wieso existiert dieses Maximum? Die Operatornorm ist die kleinste Lipschitz-Konstante $C > 0$, die $\|A(x - y)\| \leq C\|x - y\|$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{Op}$ eine Norm ist.

Aufgabe 5: Differenzierbarkeit & Stetigkeit

Seien V, W normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume, $U \subset V$ offen und $f : U \longrightarrow W$ eine in $\bar{x} \in U$ differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f stetig in $\bar{x}$ ist und dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen falsch ist.