Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 14.05.2010

Abgabe: 21.05.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 05

Aufgabe 1: Differenzieren 1

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$

(b) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{\frac{p}{q}}$ für feste $p, q \in \mathbb{N}$

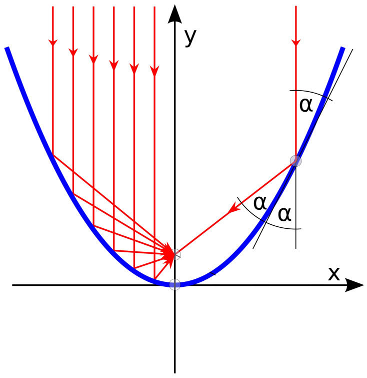
(c) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{\alpha}$ für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{x}$

(Hinweis: verwenden Sie bei (a) den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion und bei (b)-(d) die Kettenregel)

Aufgabe 2: Parabolspiegel

Gegeben sei ein Parabolspiegel, dessen Schnittkurve durch den Spiegel durch eine Parabel $p(x) = cx^2$ $(c > 0)$ beschrieben wird. Beschreiben Sie die Schnittkurve mit Hilfe einer Parametrisierung $\gamma : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 1}$ als Raumkurve im $\mathbb{R}^{2\times 1}$ und berechnen Sie sowohl den Tangential- als auch den Normalenvektor eines beliebigen Punktes auf dieser Raumkurve. Nun nehmen wir an, dass paralleles Licht parallel zur Symmetrieachse des Spiegels einfällt. Stellen Sie dazu die Geradengleichung von einem einfallenden und dem zugehörigen reflektierten Strahl auf (Spiegelung an der Normalen) und berechnen Sie den Schnittpunkt des reflektierten Strahles mit der y-Achse. Berechnen Sie den Abstand dieses Schnittpunktes (der sogenannte Brennpunkt des Parabolspiegels) zum Scheitelpunkt der Parabel in Abhängigkeit der Konstanten c.



Aufgabe 3: Differenzieren 2

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen folgender Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^{4\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \longmapsto \frac{x_1^2 x_2 + x_3}{\exp(x_3)} + x_2 \sin(4x_3) \exp(x_4 - x_1)$

(b) $f : \mathbb{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin(3x_1 + x_2)\exp(x_2) + x_2 \\ x_1^3 - x_2 \cos(5x_1)\sin(x_2) \\ \sin^2(x_2) - x_1 x_2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Kettenregel

Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Leiten Sie aus der Kettenregel für $(f \circ g)'(\overline{x})$ eine Kettenregel für den Ausdruck $\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big)|_{x=\overline{x}}$ ab.

Aufgabe 5: Skalarprodukt & Norm

Es sei $SP : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und $\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die zugehörige Norm. Bestimmen Sie unter Verwendung der Definition die Ableitung für SP und mit der Kettenregel die Ableitung von $x \longmapsto \langle f(x), g(x) \rangle = SP \circ (f, g)(x)$. Bestimmen Sie desweiteren unter Verwendung der Kettenregel und Aufgabe 1 (a) die Ableitung $\|f(x)\|'$.

Aufgabe 6: Quizaufgaben

(a) Berechnen Sie $\frac{d}{de} e^x$

(b) Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Nehmen wir an, es gilt $\langle x, y \rangle = 0$, dann folgt auch $\langle z, \langle x, y \rangle \rangle = 0$. Stimmt das? Begründen Sie Ihre Antwort.