



Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 21.05.2010

Abgabe: 28.05.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 06

Aufgabe 1: Differenzieren 1

Es sei $f : \Pi_n \rightarrow \Pi_{m \cdot n}$, $P \mapsto Q \circ P$ differenzierbar für ein festes $Q \in \Pi_m$. Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung H an der Stelle P . Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für $n = 3$ und $m = 2$ am Beispiel $P(x) = 1 + x - x^3$, $Q(x) = 1 + x + x^2$ und $H(x) = \epsilon(x^2 - 2x + 4)$ für ein $\epsilon > 0$, indem Sie die Differenz $f(P+H) - f(P) - f'(P)H$ berechnen. Bestimmen Sie für diesen Fall eine Jacobi-Matrix von f an der Stelle P .

Aufgabe 2: schlampige Notation

Für ein ideales Gas mit Druck p , Volumen V und absoluter Temperatur T gilt mit einer Konstanten c die Zustandsgleichung $pV = cT$. Berechnen Sie für ein solches Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial V}$$

Warum kann diese in Lehrbüchern häufig verwendete Notation leicht für Verwirrung sorgen? Wie sollte diese Beziehung korrekt notiert werden?

Aufgabe 3: Richtungs- und partielle Ableitungen

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass im Punkt $(0, 0)$ alle Richtungsableitungen existieren, f an der Stelle $(0, 0)$ jedoch nicht differenzierbar ist.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & , \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass im Punkt $(0, 0)$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ existieren, g an der Stelle $(0, 0)$ jedoch nicht differenzierbar ist.

(c) Gegeben sei die Funktion

$$h(x, y) := \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) (0, 0) \neq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) (0, 0)$$

Aufgabe 4: Optimierung

Seien $A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| < 1\}$ und $f : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x_1 \exp(x_1 - x_2)$ gegeben. Skizzieren Sie die Menge $\overline{A}$, parametrisieren Sie ∂A und bestimmen Sie die Extremalstellen von f über $\overline{A}$.

Aufgabe 5: Quizfragen

- (a) Sind Sternschnuppen sternförmig?
- (b) Ist die Menge $A = (0, 1) \cup (1, 2)$ zusammenhängend?
- (c) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene differenzierbare Funktion, für die $f'(x) = 0$ für alle $x \in A$ gilt. Folgt daraus schon, dass f konstant ist?