Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 28.05.2010

Abgabe: 04.06.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 07

Aufgabe 1: Matrixnorm und Lipschitz-Konstante

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\|A\| := \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ die Erweiterung der Matrixnorm von Blatt 04 Aufgabe 4 für im Allgemeinen nichtquadratische Matrizen bzgl. der $\mathbb{R}^{p\times 1}$-Vektornorm $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|,\dots,|x_p|\}$. Geben Sie eine Formel an, mit der man $\|A\|$ schnell berechnen kann.
(Hinweis: Schreiben Sie für ein $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\setminus\{0\}$ den Ausdruck $\|Ay\|_\infty$ mit Hilfe der Definition von $\|\cdot\|_\infty$ auf und überlegen Sie, für welches $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ die Norm $\|Ay\|_\infty$ maximal wird unter der Berücksichtigung von $\|y\|_\infty = 1$. Was bedeutet $\|y\|_\infty = 1$ für eine einzelne Komponente y_i?)

(b) Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : W \subset \mathbb{R}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times 1}$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gilt:

$$\sup_{x\in W}\|f'(x)\| = \sup_{x\in W}\|\partial f(x)\|$$

(c) Es sei nun $U := \{x \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid |x_i| < 1 \text{ für } i = 1,2,3\}$ und $f : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{7\exp(3)}\begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2 \\ \exp(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie unter Verwendung der entsprechenden Aussage aus der Vorlesung, dass f Lipschitz-stetig ist und geben Sie eine zugehörige Lipschitz-Konstante L an.

Aufgabe 2: Regel von l'Hospital

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte unter Verwendung der Regel von l'Hospital (auch zweimalige Anwendung der Regel ist möglich, sollte nach dem ersten Anwenden immer noch ein Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ vorliegen, etc.):

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\tan(3x)}{\tan(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\exp(x)}$ für $x > 0$ **(e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{\exp(x)}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$

(f) Sei $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und für ein $\lambda \geq 0$ und für $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$ gelte $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) + \lambda f'(x)\big) = a$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

$\Big($Hinweis: Untersuchen Sie im Fall $\lambda > 0$ den Quotienten $\frac{f(x)\exp(\frac{x}{\lambda})}{\exp(\frac{x}{\lambda})}\Big)$

Aufgabe 3: Differenzieren

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, x_2)^T \longmapsto x_1^4 + 2x_1x_2 + x_1x_2^2 - x_2^3$$

Bestimmen Sie $\partial f(x),\ \partial^2 f(x),\ \partial^3 f(x),\ \partial^4 f(x)$ und berechnen Sie anschließend für $x = (0,1)^T$ und $h \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ mit $\|h\|_\infty \leq \frac{1}{10}$ die maximale Abweichung von $f(x+h)$ und

$f(x)$ bzw.
$f(x) + f'(x)h$ bzw.
$f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)(h,h)$ bzw.
$f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)(h,h) + \frac{1}{6}f'''(x)(h,h,h)$ bzw.
$f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)(h,h) + \frac{1}{6}f'''(x)(h,h,h) + \frac{1}{24}f''''(x)(h,h,h,h)$

Was stellen Sie fest?

Aufgabe 4: mathematisches Arbeiten

zur Diskussion:

(a) Sei X ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ und x ein Randpunkt von M. Gilt dann $x \in M$? Geben Sie Beispiele an!

Checkliste:

(b) Verfassen Sie zur Definition $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent eine Checkliste.
(Ein Beispiel können Sie auf der Homepage herunterladen.)

Verstehen durch Verändern:

(c) Ersetzen Sie in der Definition von (b) die Bedingung *für alle* $\varepsilon > 0$ ... durch *für ein* $\varepsilon > 0$ ... Konstruieren Sie eine Folge, welche die neue Checkliste passiert aber in der Checkliste aus (b) scheitert. Würden Sie die gebastelte Folge als *konvergent* bezeichnen?