Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 04.06.2010

Abgabe: 11.06.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 08

Aufgabe 1: Taylor-Entwicklung I

Entwickeln Sie die Funktion

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - x^5$ nach Potenzen von $(x-1)$. Wie können Sie in diesem Fall Ihr Ergebnis auf Richtigkeit überprüfen?

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \frac{x}{\exp(x)}$ nach Potenzen von x bis zur vierten Ordnung. Bestimmen Sie das Restglied und zeichnen Sie mit einem Plotprogramm Ihrer Wahl die Funktion f, das Taylorpolynom 2ter Ordnung und das Taylorpolynom 4ter Ordnung in ein gemeinsames Schaubild.

(c) $f : \mathbb{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x,y)^T \longmapsto x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ nach Potenzen von $(x-1)$ und $(y-2)$.

Aufgabe 2: Taylor-Entwicklung II

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x,y)^T \longmapsto (x+y^2)\exp(-(x^2+y^2))$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f, die Hesse-Matrizen von f in den kritischen Punkten, sowie die Taylorentwicklungen bis zur zweiten Ordnung in den kritischen Punkten. Zeichnen Sie mit einem Plotprogramm Ihrer Wahl die Isolinien dieser Taylor-Approximationen. Was für Kurven im $\mathbb{R}^{2\times 1}$ ergeben sich anhand der Isolinien in der Umgebung der kritischen Punkte? Ziehen Sie anhand der Isolinien den Schluss, um welche Art von kritischen Punkten es sich hierbei handelt.

Aufgabe 3: mehrdimensionale Kettenregel

(a) Gegeben ist eine Kugelkoordinaten-Funktion $(r,\vartheta,\varphi) \longmapsto f(r) \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $g : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x,y,z)^T \longmapsto f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.
Berechnen Sie ∇g.

(b) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}$ und für ein festes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Funktion $g : \mathbb{R}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto f(Ax)$. Berechnen Sie ∇g.

Aufgabe 4: Divergenz und Rotation

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n\times 1}$ offen und $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ genügend oft stetig differenzierbare Funktionen. Dann definieren wir den Divergenzoperator div, den Laplaceoperator $\triangle$ und im Fall $n = 3$ den Rotationsoperator rot wie folgt:

$$\mathrm{div} f := \nabla \cdot f \qquad \triangle\, \varphi := \nabla^2 \varphi = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \varphi \qquad \mathrm{rot} f := \nabla \times f$$

Zeigen Sie für $n = 3$ folgende Relationen:

(a) $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ \varphi = 0$

(b) $\mathrm{div}\ \mathrm{rot} f = 0$

(c) $\mathrm{div}(f \times g) = \langle \mathrm{rot} f, g\rangle - \langle f, \mathrm{rot} g\rangle$

(d) $\mathrm{rot}(\varphi f) = (\mathrm{grad}\ \varphi) \times f \ + \ \varphi\ \mathrm{rot} f$

Aufgabe 5: mathematisches Arbeiten

<u>Checkliste:</u>

(a) Verfassen Sie zur Definition $f : A \subset V \longrightarrow W$ *ist differenzierbar in* $\overline{x} \in A$ eine Checkliste.

<u>Verstehen durch Verändern:</u>

(b) Ersetzen Sie in der Definition von (b) die Bedingung $U(0) = 0$ durch $U(0) = C$ mit einer Konstanten $C > 0$. Würde diese abgeänderte Definition der Differenzierbarkeit einen Sinn machen, oder führt sie zu Widersprüchen? Argumentieren Sie anhand eines eigens gewählten Beispiels.