



Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 11.06.2010

Abgabe: 18.06.2010

Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 09

Aufgabe 1: Taylor-Entwicklung

Gegeben ist die Funktion $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$. Berechnen Sie die Taylorentwicklung von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ inklusive des Restterms. Überprüfen Sie anhand einer Restterm-Abschätzung, ob sich f durch die Taylorreihe darstellen lässt.

Aufgabe 2: Banachscher Fixpunktsatz

Es seien $E = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{2 \times 1}$ und $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$ mit

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\cos x}{6} + \frac{y}{3} \\ \frac{xy^2}{8} + \frac{\sin x}{8} \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in E$$

- (a) Zeigen Sie, dass Φ eine Selbstabbildung ist, d.h. dass gilt: $\Phi(E) \subset E$
(b) Berechnen Sie für $(x, y)^T \in E$ die Jacobimatrix $\Phi'(x, y)$. Zeigen Sie, dass

$$\|\Phi'(x, y)\| \leq q < 1 \quad \text{für alle } (x, y) \in E$$

gilt, wobei mit $\|\cdot\|$ die Zeilensummennorm bezeichnet sei.

Hinweis: Die Zeilensummennorm für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist gegeben durch $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\}$

- (c) Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das nichtlineare System

$$6x = \cos x + 2y,$$

$$8y = xy^2 + \sin x$$

auf E eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 3: rekursive Folgen, Banach und Newton

- (a) In der Klausur des letzten Semesters war folgende rekursive Folge gegeben:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 6}{2x_n + 5}, \quad x_1 = 0$$

Untersuchen Sie diese Folge mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes auf Konvergenz. (ACHTUNG: Bearbeiten Sie zuerst Aufgabe 5(e))

- (b) Bestimmen Sie $\sqrt{2}$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf 6 Nachkommastellen genau.

Aufgabe 4: implizite Funktionen

Sei $\Phi(T, V, P) = 0$ eine allgemeine Zustandsgleichung eines Gases, d.h. das Gas kann nur solche Werte von Temperatur T , Volumen V und Druck P annehmen, für die $\Phi(T, V, P) = 0$ gilt.

- (a) Wann gibt es in einem zulässigen Zustand $(\bar{T}, \bar{V}, \bar{P})$ zulässige Nachbarzustände in einer beliebigen (T, V) -Richtung, d.h. unter welcher Bedingung ist es möglich, ausgehend von $(\bar{T}, \bar{V})$ die Temperatur um kleine Werte ΔT (positiv oder negativ) und das Volumen um kleine Werte ΔV (positiv oder negativ) zu ändern? Was sind die analogen Bedingungen für zulässige Nachbarzustände in beliebiger (T, P) -Richtung und beliebiger (V, P) -Richtung?
- (b) Zeigen Sie: Gibt es in einem Zustand $(\bar{T}, \bar{V}, \bar{P})$ zulässige Nachbarzustände sowohl in beliebiger (T, V) -Richtung als auch in beliebiger (T, P) -Richtung als auch in beliebiger (V, P) -Richtung, dann gilt:

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

Aufgabe 5: mathematisches Arbeiten

zur Diskussion:

Gegeben sei eine Funktion $f : A \longrightarrow \mathcal{F}(B, C)$ und für $a \in A$ und $b \in B$ eine Funktion g , deren Funktionswert durch $(f(a))(b)$ gegeben ist. Von wo nach wo bildet g ab, wenn

- (a) a variabel und b fest gewählt werden?
- (b) a fest und b variabel gewählt werden?
- (c) a und b variabel gewählt werden?

Sei nun $C = \mathcal{F}(D, E)$ und $d \in D$ und g durch $((f(a))(b))(d)$ definiert. Von wo nach wo bildet g nun ab, wenn

- (d) b fest und a, d variabel gewählt werden?

Sätze anwenden:

Mathematische Sätze bestehen aus zwei Teilen, den Voraussetzungen und den daraus erzielten Folgerungen. Um die Folgerungen nutzen zu können, muss nachgewiesen werden, dass *alle* Voraussetzungen erfüllt sind. Dieser Nachweis entspricht dem Abarbeiten von Checklisten wie im Fall der Definitionen.

- (e) Stellen Sie eine Checkliste für den Banachschen Fixpunktsatz auf und arbeiten Sie diese in Aufgabe 3(a) sorgfältig ab (beim Begründen werden wiederum weitere Definitionen und Sätze, also weitere Checklisten benutzt ...).