Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 18.06.2010

Abgabe: 25.06.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 10

Aufgabe 1: implizite Funktionen

Auf Blatt 02 Aufgabe 1 haben wir die Strom-Spannungs-Kennlinie einer Diode betrachtet. Dort sollten Sie eine Gleichung $F(U) = U_{bat}$ herleiten und zeigen, dass diese Gleichung für jedes $U_{bat} \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung besitzt (Gleichung siehe Homepage). Zeigen Sie nun, dass die Auflösung dieser Gleichung nach U eine glatte Funktion der Parameter $U_{bat}, \alpha, \beta, R$ ist. (Hinweis: Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen und stellen Sie die dafür benötigte Funktion ϕ auf). Mit den Daten aus Aufgabe 1 Blatt 02 ($\alpha = 2.29 \cdot 10^{-9}A$, $\beta = 22.6\frac{1}{V}$, $R = 1k\Omega$ und $U_{bat} = 2.5V$) berechnete sich die Diodenspannung etwa zu $U = 0.6030V$. Wie ändert sich die Diodenspannung, wenn man die Bateriespannung leicht ändert, z.B. um $(0.001V$, $0.002V$, ... , $0.01V)$?

Aufgabe 2: implizit gegebene Lösung der Burgers-Gleichung

Hier sehen Sie, wie man mit dem Satz über implizite Funktionen die Existenz von Lösungen zu einem partiellen Differentialgleichungsproblem nachweisen kann.

Sei $\Phi(t, x, u) = \exp(x - tu) - u$ für $t, x, u \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die implizite Gleichung $\Phi(t, x, u) = 0$ in der Umgebung von Punkten $(0, x, \exp(x))$ nach u aufgelöst werden kann.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Auflösung $U(t, x)$ aus der impliziten Gleichung $\Phi(t, x, U(t, x)) = 0$ und zeigen Sie durch Einsetzen, dass U folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(U(t,x))^2 = 0 \quad , \quad U(0,x) = \exp(x)$$

Aufgabe 3: Tangential- und Normalraum

Gegeben sei der sogenannte "Affensattel" (der Name beschreibt den Graphen von φ, denn auf dem "Sattel" könnte ein Affe seine Beine und seinen Schwanz ablegen)

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{2\times 1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y)^T &\longmapsto x^3 - 3xy^2 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Fläche im $\mathbb{R}^{3\times 1}$, die durch

$$\left\{ \big(x, y, \varphi(x,y)\big)^T \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben ist.

(a) Berechnen Sie im Punkt $\big(1, 1, \varphi(1, 1)\big)^T$ den zugehörigen Tangential- und Normalraum an die obige Fläche.
(Bemerkung: im $\mathbb{R}^{3\times 1}$ kann man den Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt der Tangentenvektoren konstruieren. Allgemeiner hilft aber der Trick, den Graphen als Nullfläche von $\phi(x, y, z) = z - \varphi(x, y)$ zu schreiben und dann $\nabla\phi$ zur Berechnung des Normalraumes zu benutzen. Bitte wählen Sie diesen allgemeineren Weg zur Übung!)

(b) Nun schneiden wir den Affensattel mit dem Graph von $x = \psi(y, z) = z^3 - 3zy^2+3$ und erhalten dadurch eine Schnittkurve, die durch den Punkt $(1, 1, -2)^T$ geht. Berechnen Sie in diesem Punkt den Tangential- und Normalraum an die Schnittkurve.

Aufgabe 4: Optimierung & Lagrange-Multiplikatoren I

Bestimmen Sie das Volumen des größten Quaders mit achsenparallelen Kanten innerhalb des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(Hinweis: Formulieren Sie zuerst die zu maximierende Volumenfunktion und die zu beachtende Nebenbedingung, bevor Sie die Lagrange-Funktion aufstellen und das Problem mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorregel lösen)

Aufgabe 5: Optimierung & Lagrange-Multiplikatoren II

Zeigen Sie, dass das geometrische Mittel nie größer als das arithmetische Mittel ist, das heißt, dass für beliebige positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \;\leq\; \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

(Hinweis: maximieren Sie die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2$ unter der Nebenbedingung $x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0$)