



Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 25.06.2010

Abgabe: 02.07.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 11

Aufgabe 1: Kondensatorladung

Bringt man auf einen Kondensator der Kapazität C die Ladung ΔQ auf, so erhöht sich die anliegende Spannung um $\Delta U = \frac{\Delta Q}{C}$. Die dazu benötigte Energie $\Delta E \approx \Delta Q \cdot \tilde{U}$ hängt dabei von der vorher anliegenden Spannung $\tilde{U}$ ab, wobei der Zusammenhang $\frac{\Delta E}{\Delta Q} \approx \tilde{U}$ erst im Grenzwert $\Delta Q \rightarrow 0$ zu einer Gleichung wird, da sich ja beim Aufbringen einer endlichen Ladung die Spannung ändert.

Wieviel Energie wird benötigt um die Gesamtladung Q auf den Kondensator zu bringen?

Betrachten Sie dazu folgendes Gedankenexperiment: Die aufzubringende Ladung Q wird in Portionen $\Delta Q = \frac{Q}{M}$ aufgebracht. Die Spannung beim Aufbringen liegt daher irgendwo zwischen den Spannungswerten vor und nach dem Aufbringen. Zeigen Sie, dass der Ausdruck für die Gesamtenergie (approximatives Integral) für $M \rightarrow \infty$ immer gegen den gleichen Wert konvergiert.

Aufgabe 2: Integraleigenschaften

In der Vorlesung wurde für eine beschränkte Funktion f das Riemann-Integral I über dem Intervall $[a, b]$ bezüglich einer beliebigen Folge Z_n von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $\Delta Z_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und Auswahlvektoren $\xi^{(n)} \in \mathbb{R}^{M_n \times 1}$ zu Z_n wie folgt definiert:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{M_n} f(\xi_i^{(n)}) (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) \right)$$

Zeigen Sie anhand dieser Definition (an Checkliste denken!) für zwei auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbare Funktionen f, g folgende Eigenschaften des Integrals:

(a) Linearität: $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$

(b) Monotonie: $f \leq g \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

(c) Dreiecksungleichung: unter der Annahme, dass $|f|$ integrierbar ist

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(d) Mittelwertsatz der Integralrechnung:

Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Hinweis: verwenden Sie (b) für die Teilaufgaben (c) und (d)

Aufgabe 3: Integration

Bestimmen Sie folgende Integrale:

(a) $\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2+\cos t}} dt$ für $x \geq 0$
(Tipp: Substitution)

(b) $\int_2^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt$ für $x \geq 2$
(Tipp: Hilfsfunktion $u(t) := t + \sqrt{t^2-1}$)

(c) $\int_2^x \frac{t^2-t+1}{(t-1)^3} dt$ für $x \geq 2$
(Tipp: schauen Sie in der Literatur unter Partialbruchzerlegung nach)

(d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$
(Tipp: partielle Integration)

(e) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$
(Tipp: verwenden Sie (d))

(f) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

(g) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren die Integrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ bzw. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$?