Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 02.07.2010

Abgabe: 09.07.2010
Vor Beginn der Vorlesung

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Blatt 12

Aufgabe 1: Kurvenlänge

Berechnen sie die Länge folgender Kurven:

(a) Helix:
$\gamma(t) = \big(r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t), ht\big)^T$ für $r, h > 0$ beliebig aber fest, und $t \in [0,1]$

(b) logarithmische Spirale:
$x(r,\varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ mit $\varphi = \ln r$ für $r \in (0,1]$

(c) Spirale:
Für welche $\alpha > 0$ nimmt die Kurvenlänge der folgenden Spirale einen endlichen Wert an? (Begründen Sie ihre Aussage durch geeignete Abschätzungen)
$x(r,\varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)^T$ mit $\varphi = \frac{1}{r^\alpha}$ für $r \in (0,1]$

Aufgabe 2: Integrabilitätsbedingung

Zeigen Sie, dass das auf $G = \mathbb{R}^{2\times 1} \setminus \{0\}$ definierte Vektorfeld

$$F(x) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt, jedoch kein konservatives Kraftfeld beschreibt. Ändert man das Definitionsgebiet ab zu $\tilde{G} = \mathbb{R}^{2\times 1} \setminus \{(x_1, 0)^T \mid x_1 \leq 0\}$, so lässt sich ein Potential von F auf $\tilde{G}$ angeben. Warum ist F nun ein konservatives Kraftfeld? Geben Sie ein Potential von F auf $\tilde{G}$ an.

Aufgabe 3: Rotationsflächen und -volumen

Gegeben sei eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Nun soll die Oberfläche bzw. das Volumen berechnet werden, das durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht. Leiten Sie eine Formel her, mit der Sie

(a) die Oberfläche **(b)** das Volumen

des Rotationskörpers in Abhängigkeit der Funktion f berechnen können. Berechnen Sie damit die Oberfläche und das Volumen im Fall $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in [1, \infty)$.
(Hinweis: Verwenden Sie jeweils den Transformationssatz, um das Integral $\int_{H(I)} 1dy$ zu bestimmen, wobei I ein zwei- bzw. dreidimensionales Intervall und H jeweils eine geeignete Deformation ist, die die Rotationsfläche bzw. das Rotationsvolumen erzeugt)

Aufgabe 4: Fluß durch Oberfläche eines Zylinders

Gegeben sei der Zylinder $B = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \le 1\ ,\ -1 \le x_3 \le 1\right\}$ und das Vektorfeld

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1^2 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie durch Übergang zu Zylinderkoordinaten (wie lautet die zugehörige Deformationsabbildung?), dass das Oberflächenintegral $\int_{\partial B}(F \cdot n)dx$ über die Oberfläche des Zylinders mit der äußeren Flächeneinheitsnormalen n denselben Wert liefert, wie das Volumenintegral $\int_B(\operatorname{div} F)dx$.

Aufgabe 5: Integration

Gegeben sei eine Menge $B \subset \mathbb{R}^{2\times 1}$, die durch $y = x$, $xy = 1$ und $y = 2$ berandet ist.

(a) Skizzieren sie die Menge B.

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von B.

(c) Bestimmen Sie das Volumen des auf B stehenden Zylinderabschnitts mit Deckfläche $z = \frac{y^2}{x^2}$