Mathematik für Physiker I

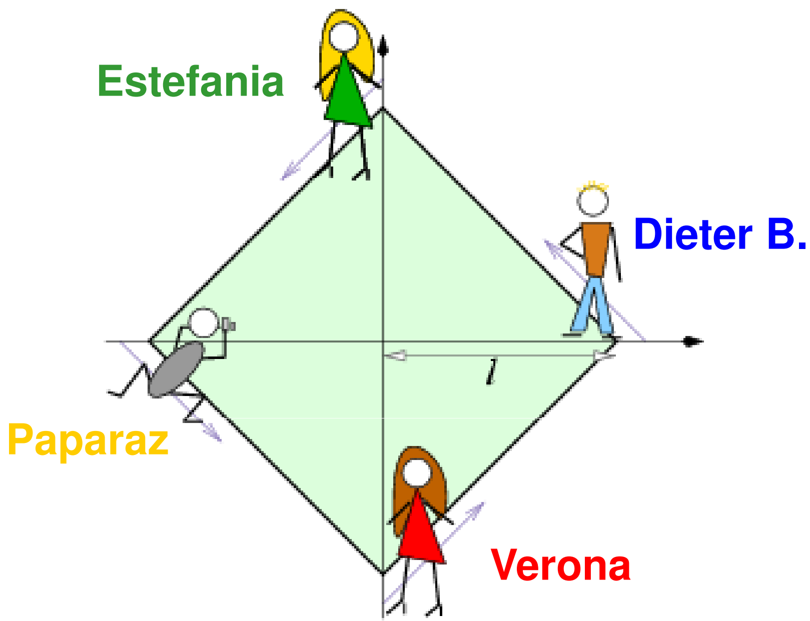
Themenübersicht

Michael Junk

Raum G 417

4 Verfolger

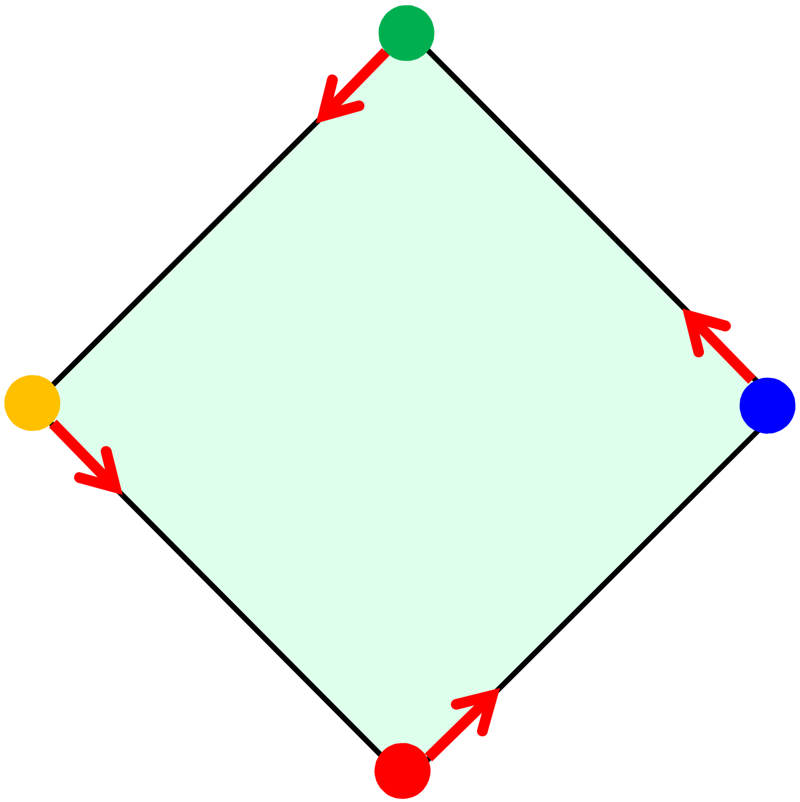
Jeder bewegt sich mit fester Geschwindigkeit immer in Richtung zum Vorgänger



Auf die Plätze …

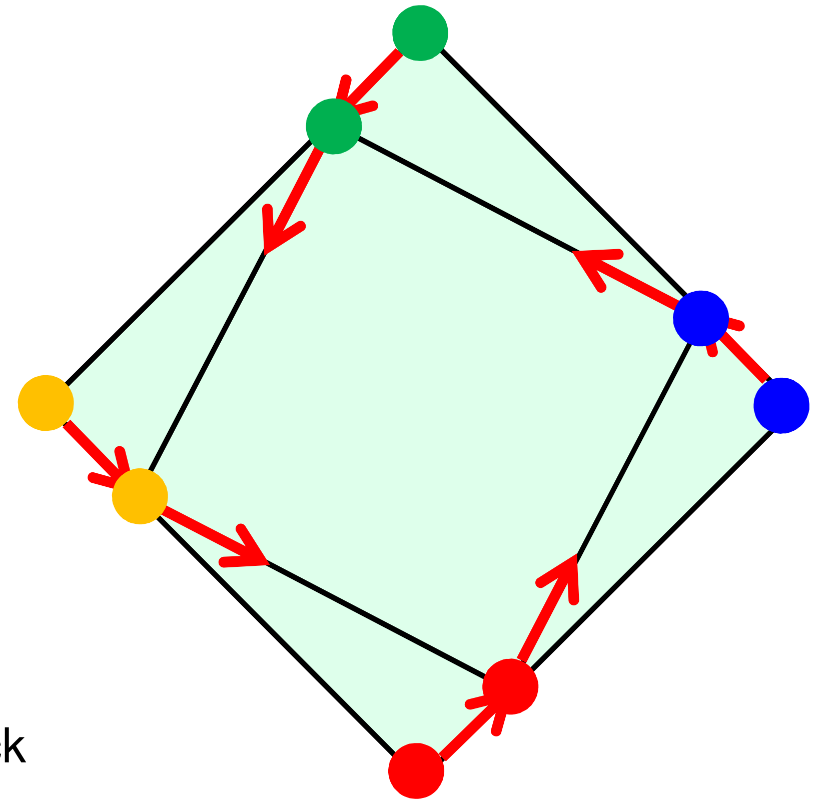
… fertig

Tick



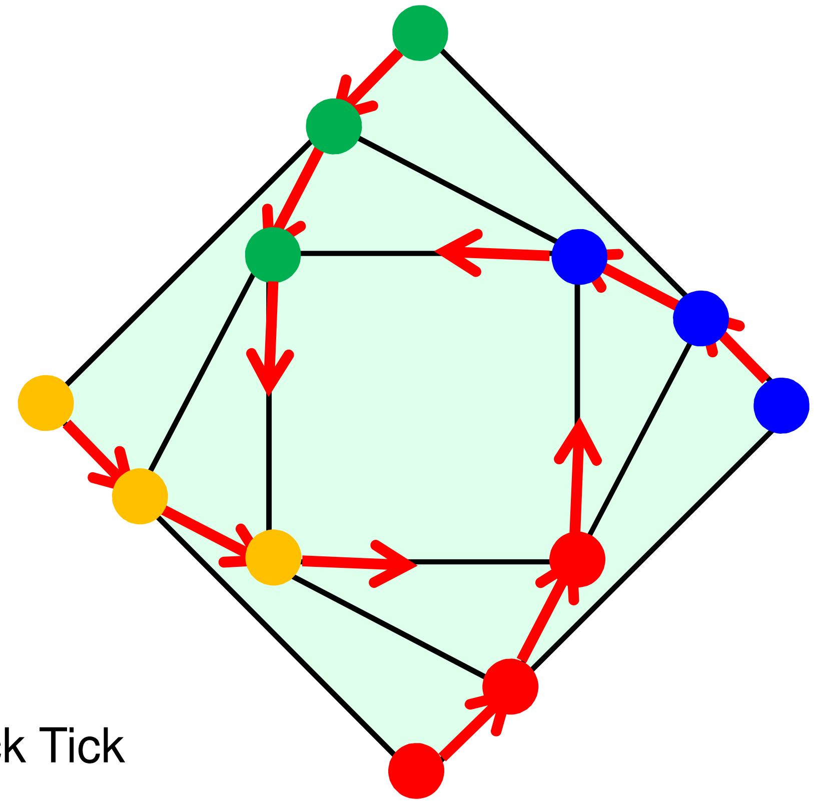
… los

Tick Tack



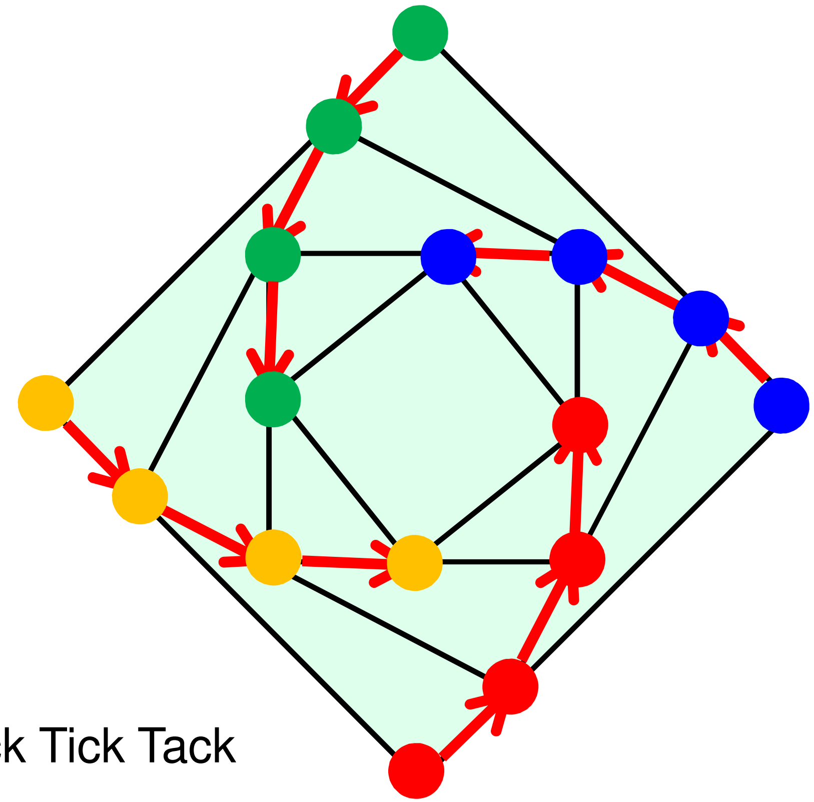
… los

Tick Tack Tick

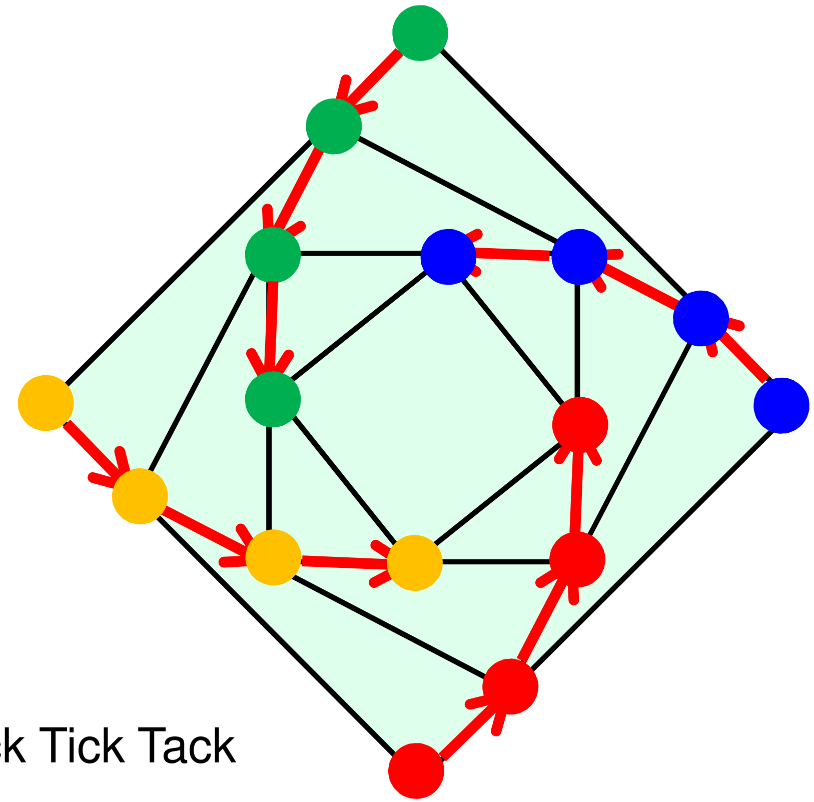


... los

Tick Tack Tick Tack



Mathematische Beschreibung der Bewegung?



Tick Tack Tick Tack

Frage: Was ist Bewegung?

Eine zeitliche Änderung von Positionen

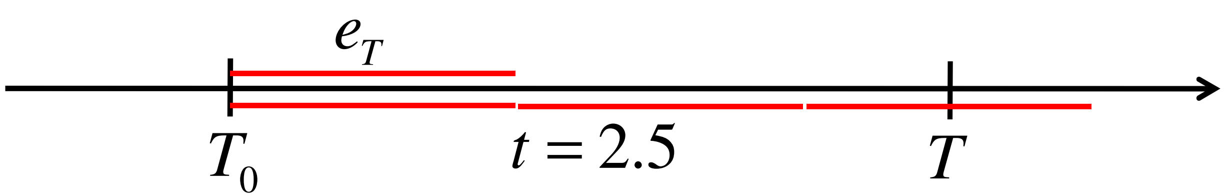
Frage: Was ist Zeit?

… philosophische Frage …

Frage: Wie beschreibt man Zeit?

Definition einer Zeiteinheit e_T

Festlegung eines Referenzzeitpunkts T_0

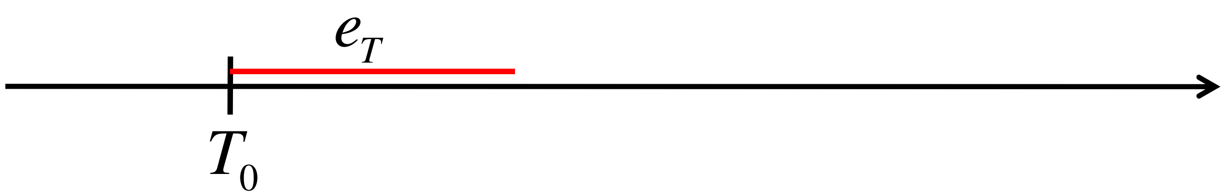


Ein beliebiger Zeitpunkt T wird beschrieben durch die Anzahl t der Zeiteinheiten zwischen T_0 und T (t negativ, wenn T vor T_0)

Standardmodell:
beliebige reelle Bruchteile der Zeiteinheit möglich: $t \in \mathbb{R}$

Frage: Wie beschreibt man Zeit?

Zeit wird durch $\left(e_T, T_0, \mathbb{R}\right)$ beschrieben



$\mathbb{R}$ ist ein typisches Beispiel eines angeordneten Körpers

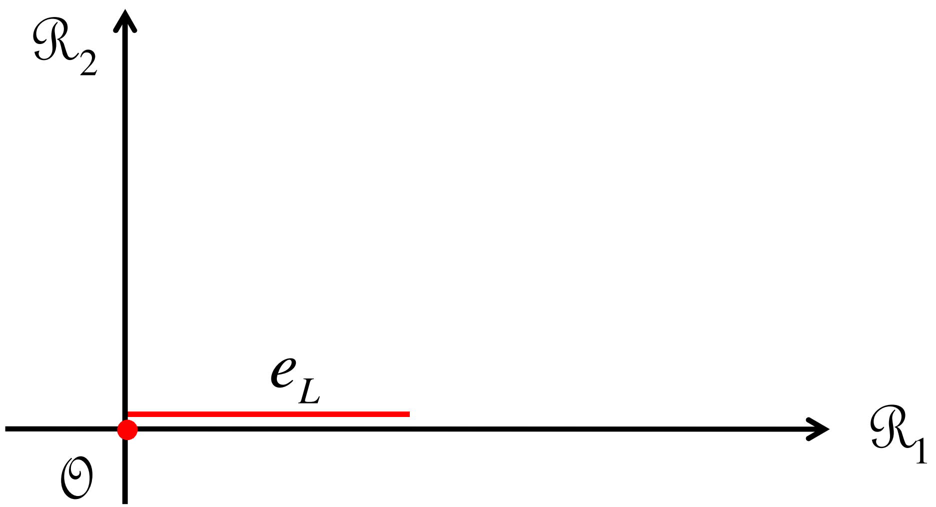
Ordnungsrelation $s < t$ bedeutet s ist früher als t

Frage: Wie beschreibt man Positionen?

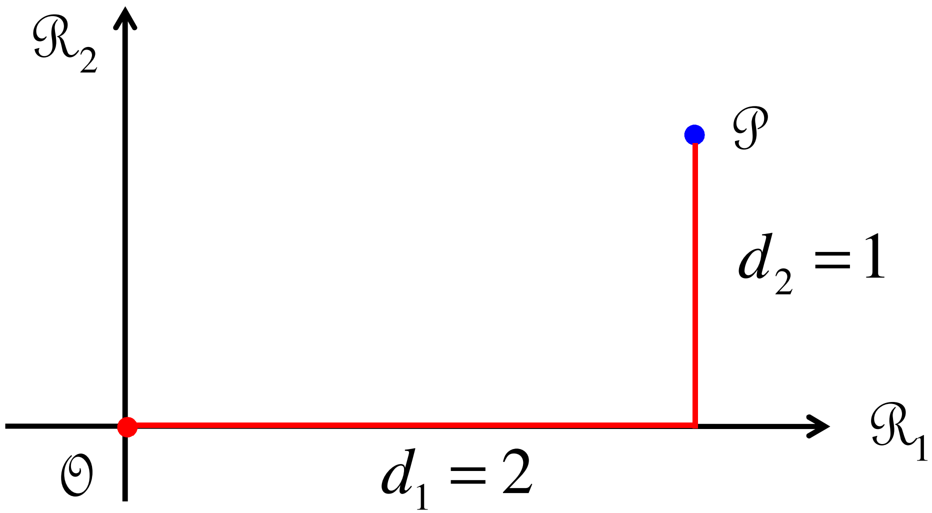
Definition einer Längeneinheit e_L

Festlegung einer Referenzposition $\mathcal{O}$

Festlegung von Referenzrichtungen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$



Frage: Wie beschreibt man Positionen?



Eine Position $\mathcal{P}$ ist beschrieben durch die Anzahl d_1, d_2, d_3 der Längeneinheiten, um die ein Punkt ausgehend von der Stelle $\mathcal{O}$ nacheinander entlang der Richtungen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ verschoben werden muss, um an der Position $\mathcal{P}$ anzukommen.

Frage: Wie beschreibt man Positionen?

Standardmodell:
beliebige reelle Bruchteile der Längeneinheit sind möglich

$$d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$$

zusammengefasst:

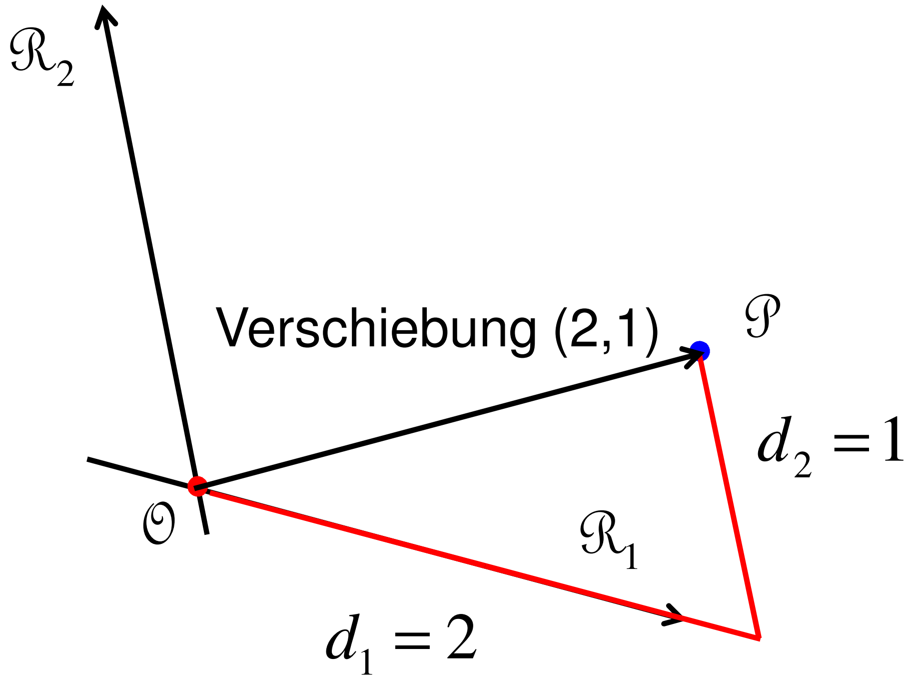
$$(d_1, d_2) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{\substack{\text{Menge aller Paare} \\ \text{mit Komponenten aus } \mathbb{R}}} = \mathbb{R}^2$$

kartesisches Mengenprodukt

$$(d_1, d_2, d_3) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{\substack{\text{Menge aller Tripel} \\ \text{mit Komponenten aus } \mathbb{R}}} = \mathbb{R}^3$$

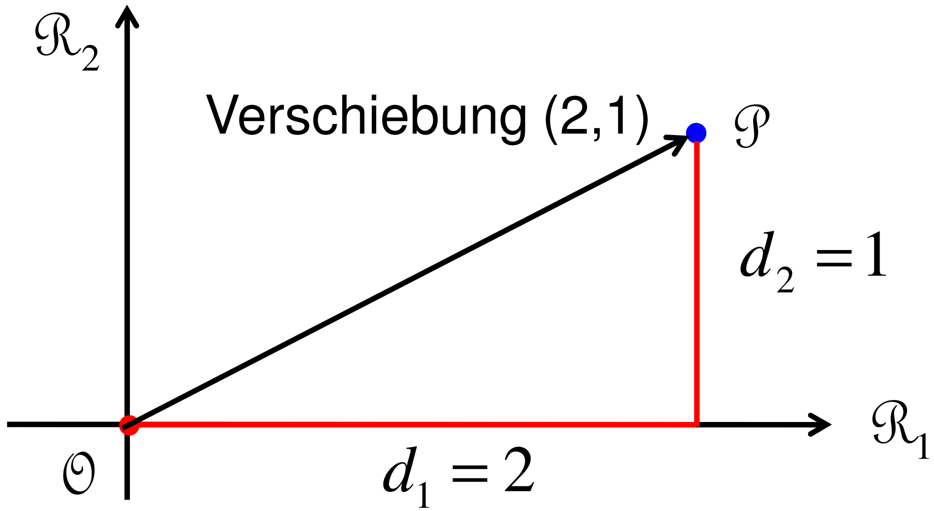
Paare/Tripel beschreiben Verschiebungen (und indirekt Positionen)

$\left(\mathcal{O}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, e_L\right)$ bzw. $\left(\mathcal{O}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, e_L\right)$ sind Koordinatensysteme



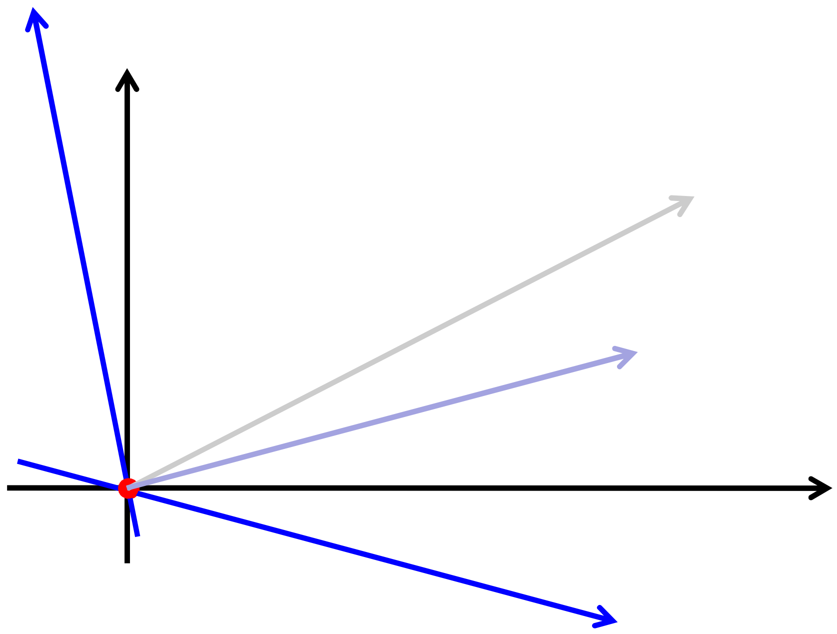
allgemeines Koordinatensystem

$\left(\mathcal{O}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, e_L\right)$ bzw. $\left(\mathcal{O}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, e_L\right)$ sind Koordinatensysteme



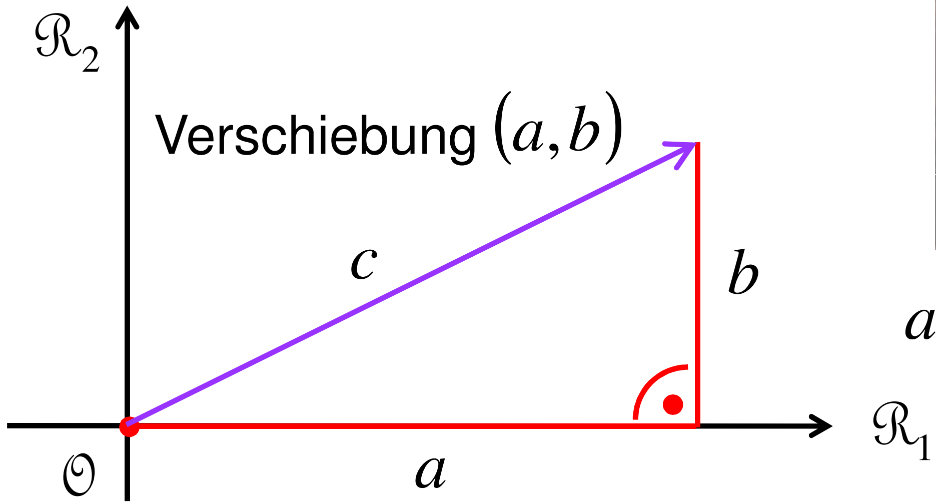
kartesisches Koordinatensystem

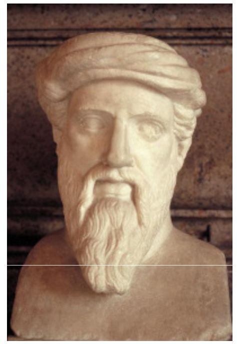
Achtung: In unterschiedlichen Koordinatensystemen steht das gleiche Paar (2,1) für unterschiedliche Verschiebungen



Vorteil des kartesischen Koordinatensystems:

Länge der Verschiebung leicht zu berechnen!





$$a^2 + b^2 = c^2$$

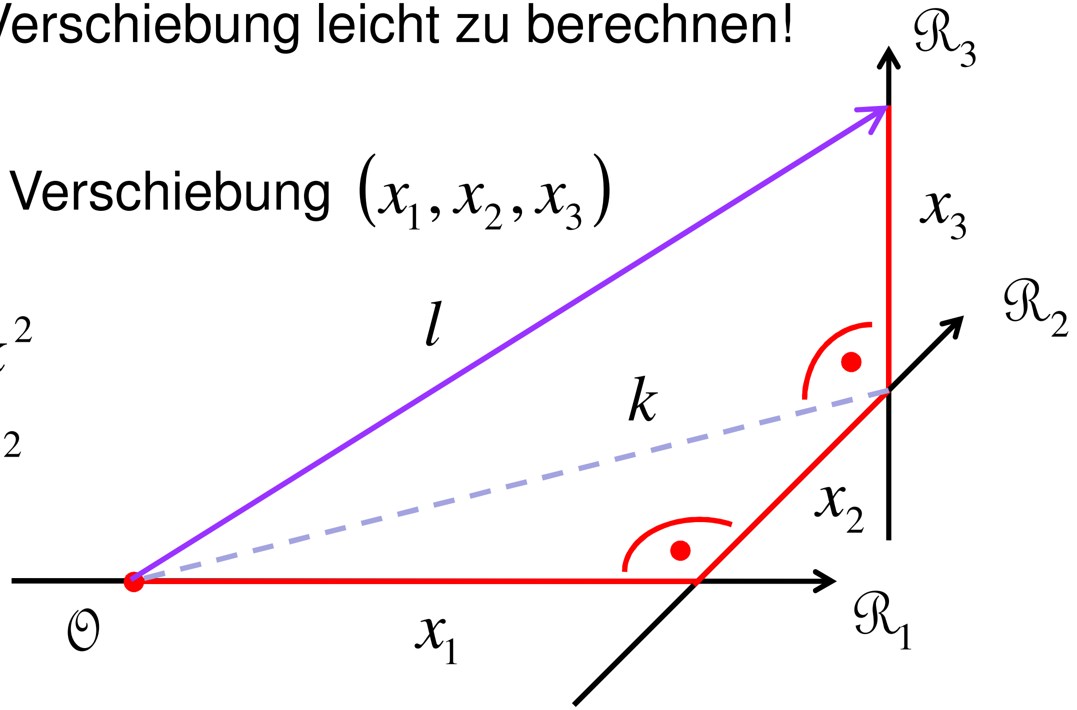
Notation: $\|(a,b)\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ Länge oder Norm von (a,b)

Vorteil des kartesischen Koordinatensystems:

Länge der Verschiebung leicht zu berechnen!

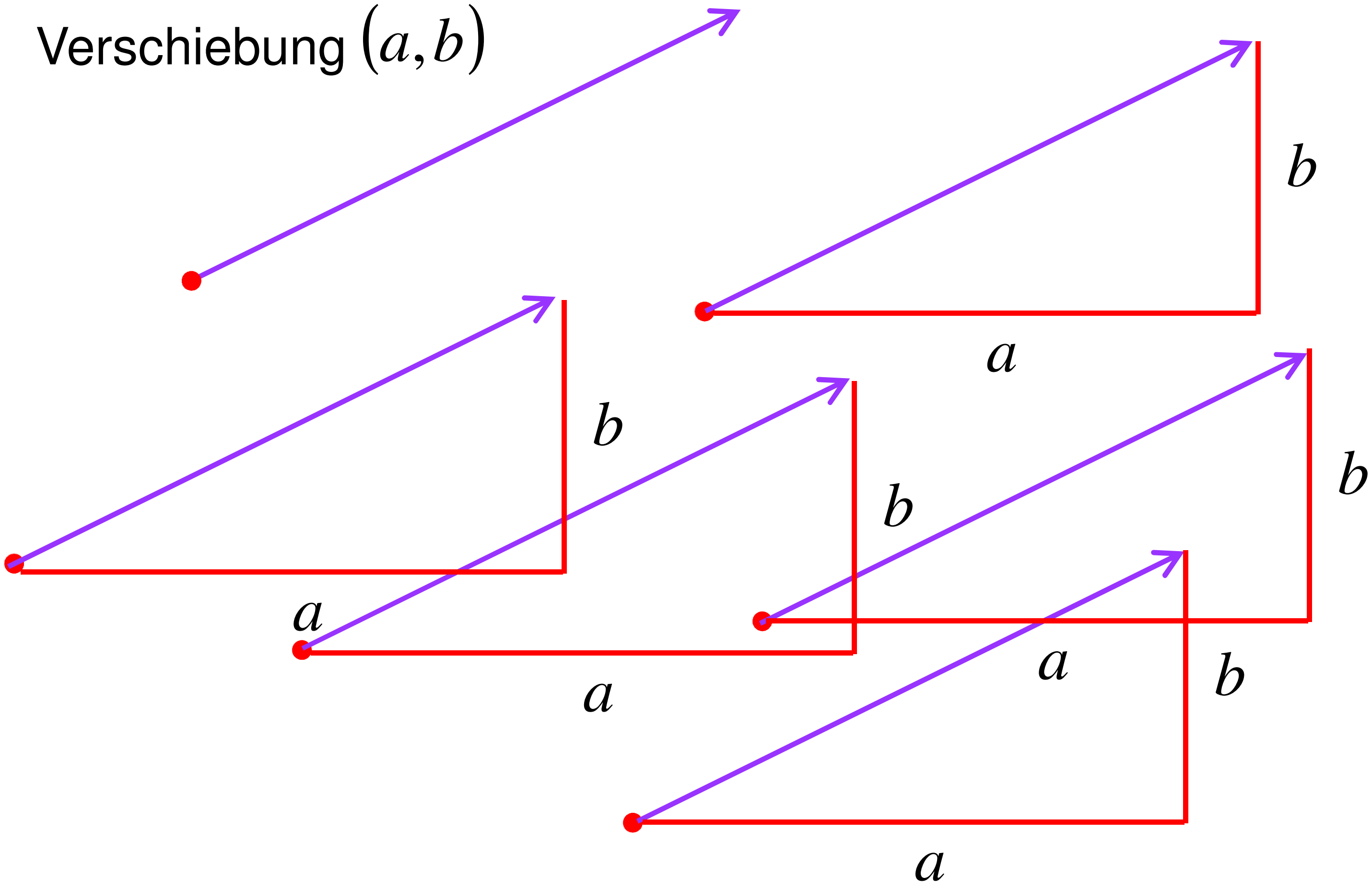
$$x_1^2 + x_2^2 = k^2$$

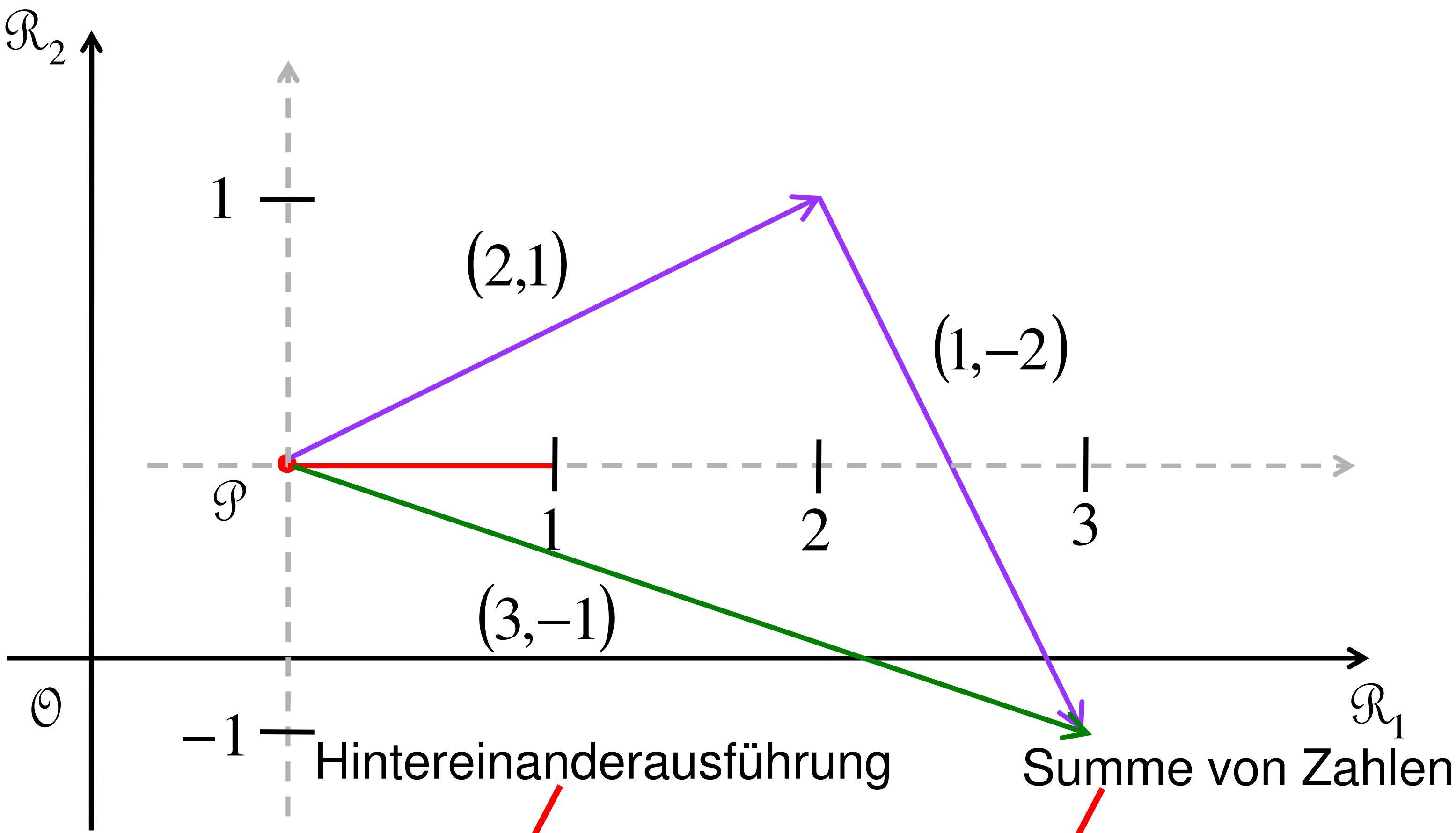
$$k^2 + x_3^2 = l^2$$



Notation: $\left\|(x_1, x_2, x_3)\right\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Verschiebung (a, b)





Schreibweise: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

Seite mit **:** definiert durch Seite mit **=**

Kommutativgesetz: $(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(y_1, y_2)+(x_1, x_2)$

Wieso? $(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ … so war's definiert

$=(y_1 + x_1, y_2 + x_2)$ … bei Zahlen darf man

$=(y_1, y_2)+(x_1, x_2)$ … so war's definiert

Kommutativgesetz: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2)$

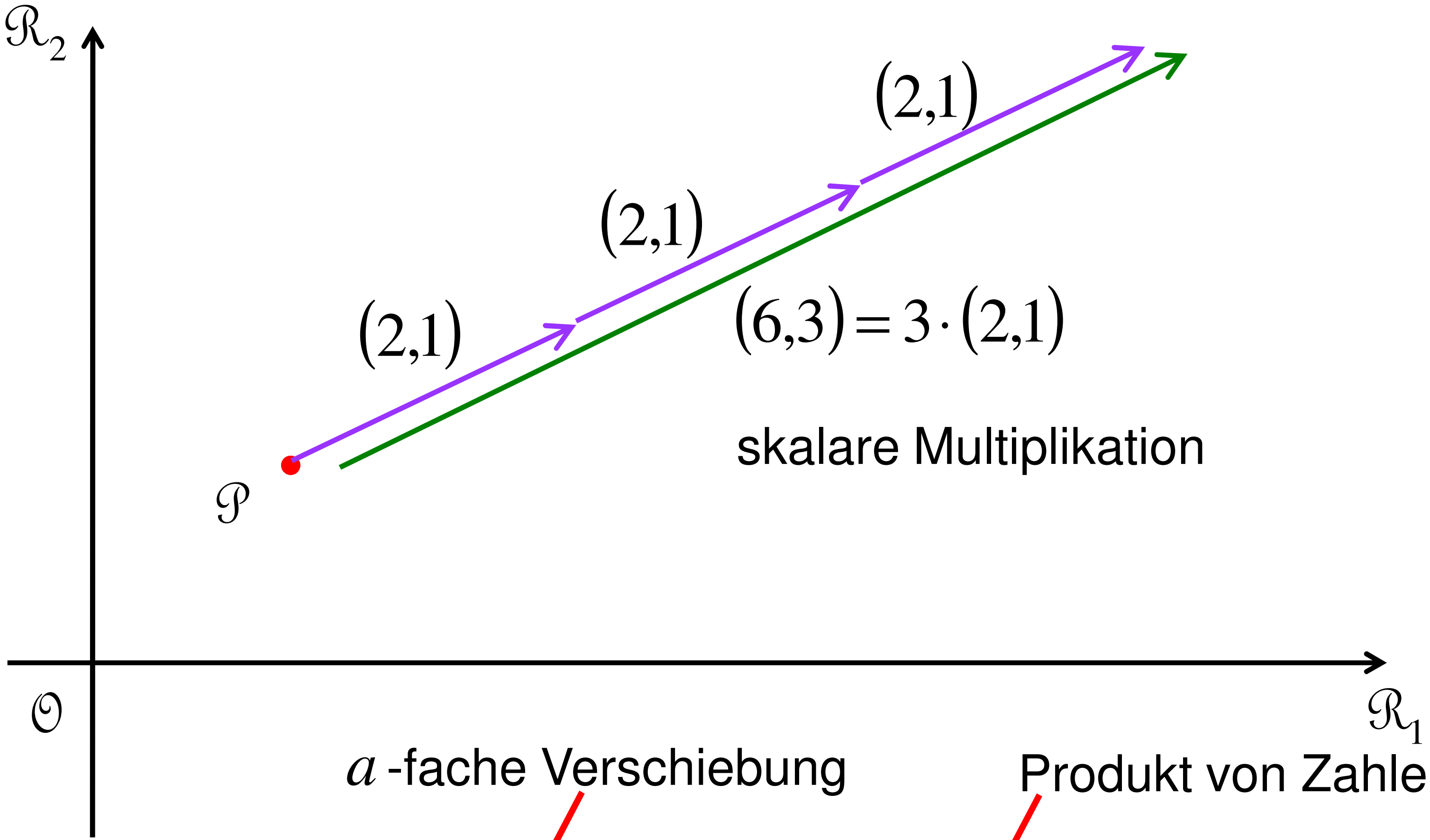
Assoziativgesetz: $((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2))$

Nullverschiebung: $(x_1, x_2) + (0{,}0) = (x_1, x_2)$

Rückverschiebung: $(x_1, x_2) + \underbrace{(-x_1, -x_2)} = (0{,}0)$

wird auch mit $-(x_1, x_2)$ bezeichnet

$(x_1, x_2) - (y_1, y_2)$ kürzt $(x_1, x_2) + (-(y_1, y_2))$ ab



a -fache Verschiebung

Produkt von Zahlen

Schreibweise: $a \cdot (x_1, x_2) := (a \cdot x_1, a \cdot x_2)$

Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot (x_1, x_2)) = (a \cdot b) \cdot (x_1, x_2)$

Distributivgesetz: $(a + b) \cdot (x_1, x_2) = a \cdot (x_1, x_2) + b \cdot (x_1, x_2)$

Distributivgesetz: $a \cdot ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = a \cdot (x_1, x_2) + a \cdot (y_1, y_2)$

neutrales Element: $1 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

Beispiel: was ist $\frac{1}{4} \cdot (x_1, x_2)$?

$\frac{1}{4} \cdot (x_1, x_2)$ ist die Verschiebung, die 4 mal ausgeführt (x_1, x_2) ergibt

$$4 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot (x_1, x_2) \right) = \left(4 \cdot \frac{1}{4} \right) \cdot (x_1, x_2) = 1 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ bzw. $\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot\right)$ sind typische Vektorräume

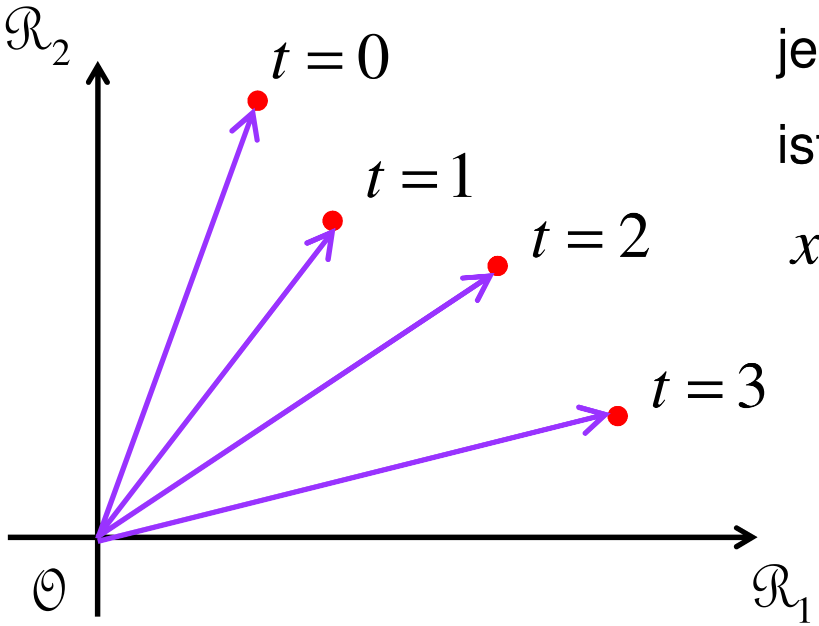
Elemente von Vektorräumen heißen Vektoren

Ebene/räumliche Verschiebungen sind also spezielle Vektoren

Die Verschiebung die $\mathcal{O}$ in $\mathcal{P}$ überführt heißt auch Ortsvektor zu $\mathcal{P}$

Positionen lassen sich durch Ortsvektoren beschreiben

Frage: Wie beschreibt man Bewegung?



jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$

ist genau ein Ortsvektor

$x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ zugeordnet

Frage: Wie beschreibt man Bewegung?

Durch Funktionen.

Definitionsmenge Wertemenge

Funktionsname

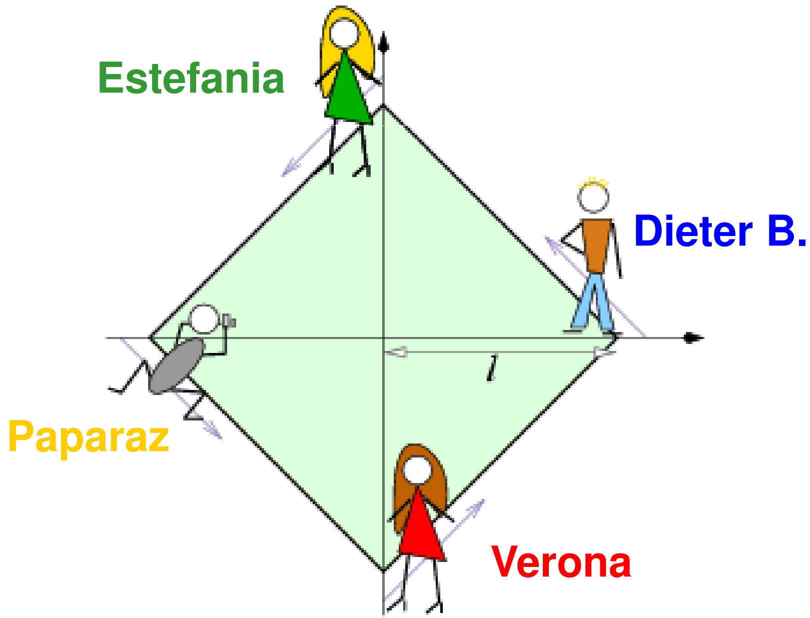
$$
\begin{aligned}
x : [0,T] &\to \mathbb{R}^2 \\
t &\mapsto x(t)
\end{aligned}
$$

Argument Funktionswert

Frage: Wie lautet die Funktion im Beispiel?

4 Verfolger

Jeder bewegt sich mit fester Geschwindigkeit w immer in Richtung zum Vorgänger

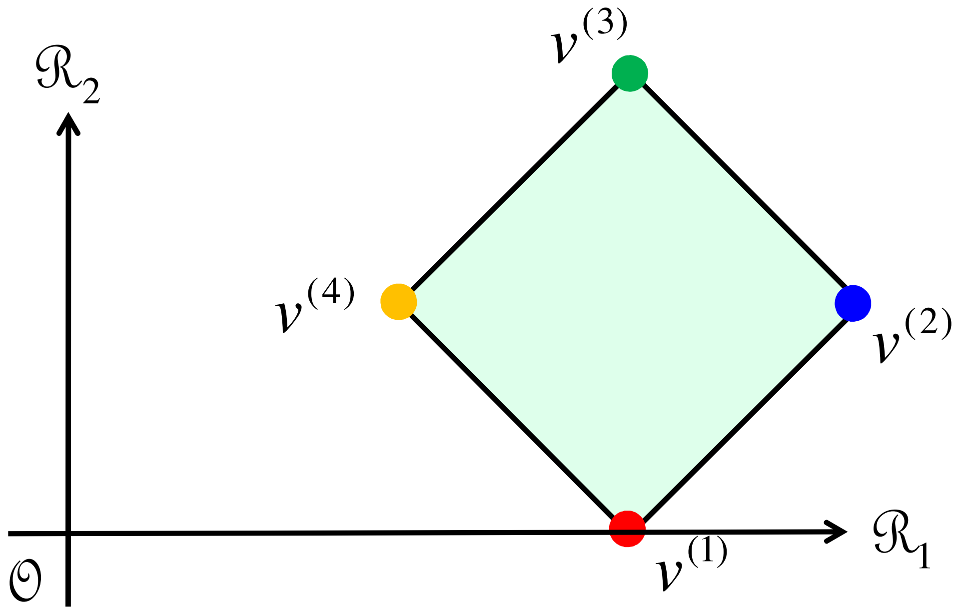


Wertemenge?

$$\left(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}\right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \left(\mathbb{R}^2\right)^4$$

Verfolgungszustand wird durch 8 Zahlen beschrieben…

Das Problem ist 8-dimensional



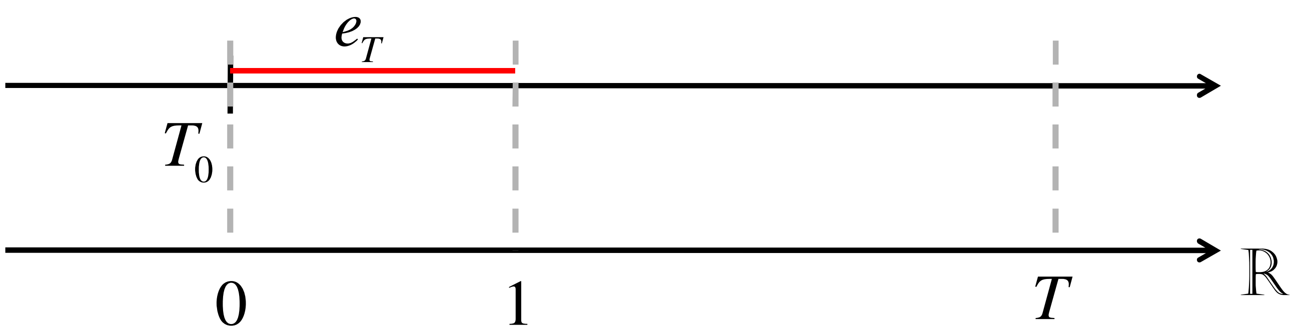
Definitionsmenge?

“…mit der Eigenschaft …”

$$[0,T] = \{\, t \in \mathbb{R} \mid 0 \le t \le T \,\}$$

Intervall

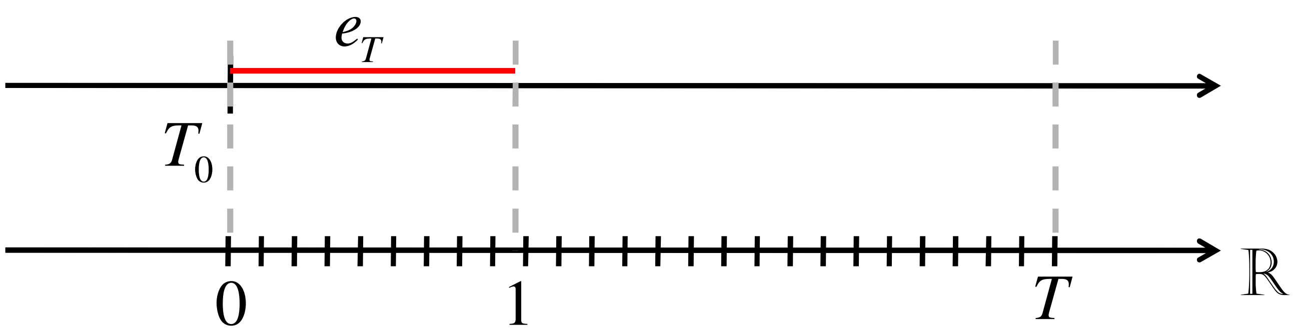
“Die Menge aller …”



Definitionsmenge?

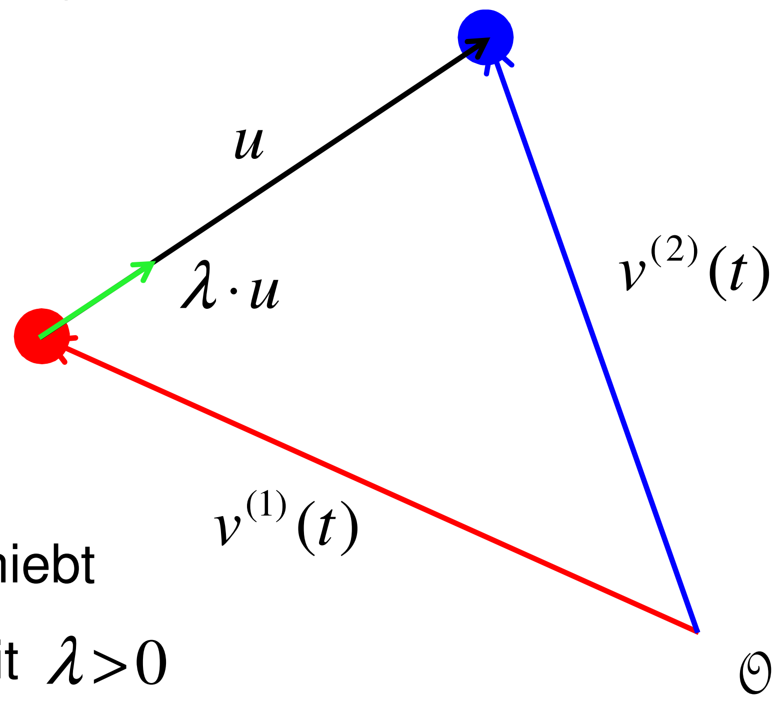
oder bei festem Zeittakt $\Delta t > 0$

$$\mathscr{T} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, n\Delta t = T\}$$



Funktionsvorschrift?

Schauen wir uns zwei Verfolger an …



Idee: der rote Verfolger verschiebt

sich in der Zeit Δt um $\lambda \cdot u$ mit $\lambda > 0$

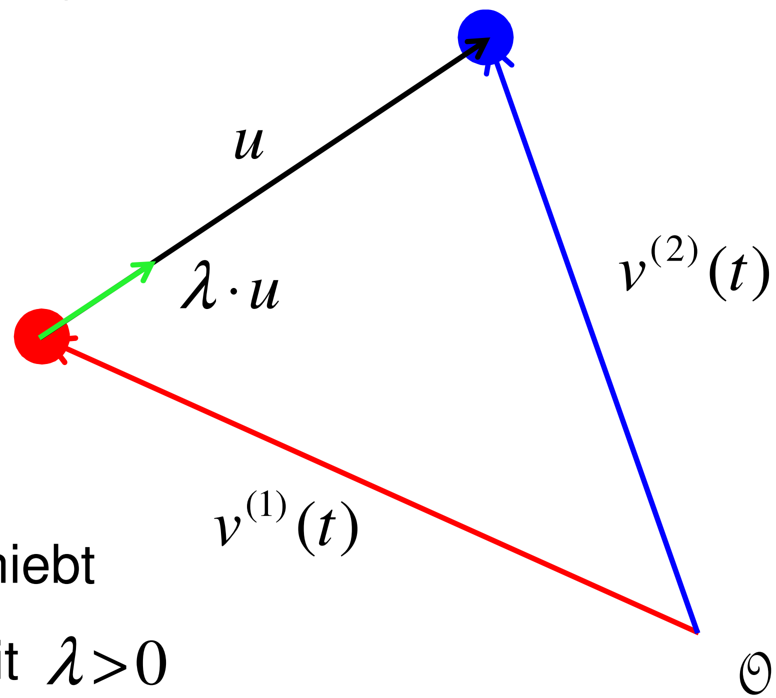
Funktionsvorschrift?

Schauen wir uns zwei Verfolger an …

$$v^{(1)}(t)+u=v^{(2)}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$u=v^{(2)}(t)-v^{(1)}(t)$$



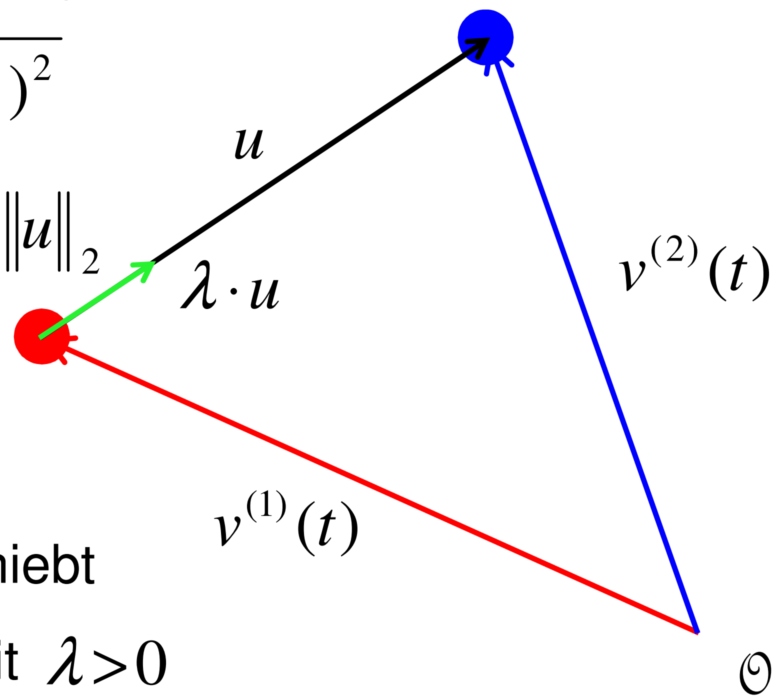
Idee: der rote Verfolger verschiebt

sich in der Zeit Δt um $\lambda \cdot u$ mit $\lambda > 0$

Funktionsvorschrift?

Schauen wir uns zwei Verfolger an …

$$\|\lambda \cdot u\|_2 = \sqrt{(\lambda u_1)^2 + (\lambda u_2)^2}$$
$$= \lambda \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lambda \|u\|_2$$



Idee: der rote Verfolger verschiebt

sich in der Zeit Δt um $\lambda \cdot u$ mit $\lambda > 0$

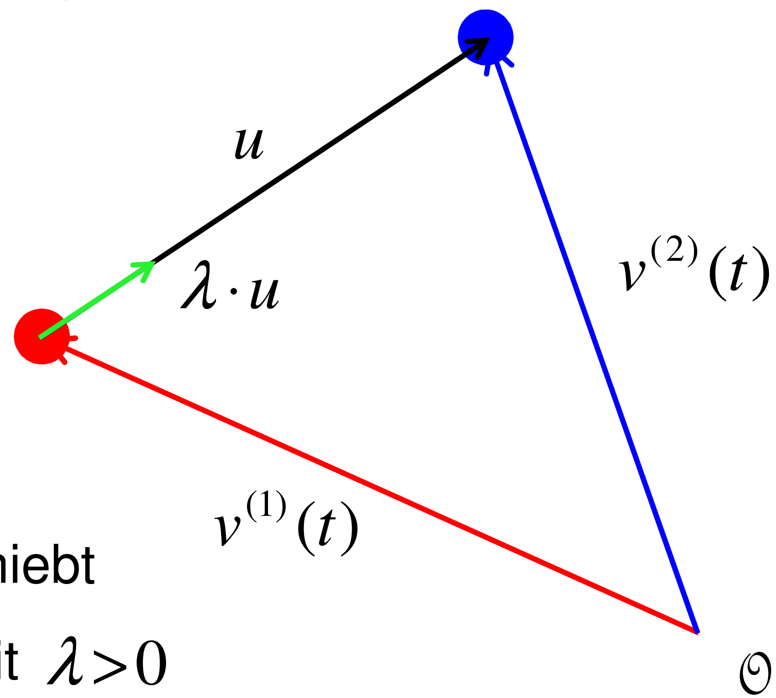
Funktionsvorschrift?

Schauen wir uns zwei Verfolger an …

$$\|\lambda \cdot u\|_2 = w\Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{w\Delta t}{\|u\|_2}$$

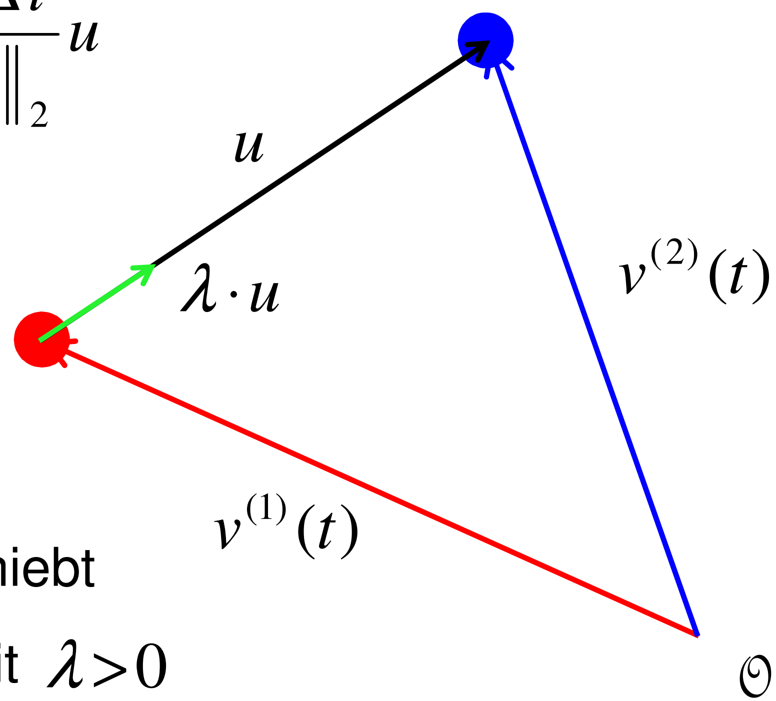


Idee: der rote Verfolger verschiebt

sich in der Zeit Δt um $\lambda \cdot u$ mit $\lambda > 0$

Funktionsvorschrift?

$$v^{(1)}(t+\Delta t) = v^{(1)}(t) + \frac{w\Delta t}{\|u\|_2} u$$

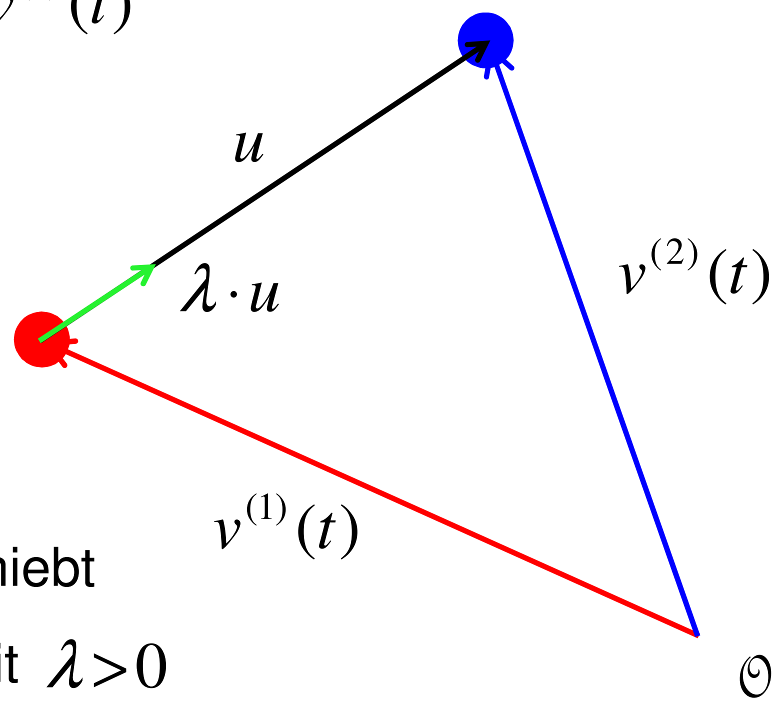


Idee: der rote Verfolger verschiebt sich in der Zeit Δt um $\lambda \cdot u$ mit $\lambda > 0$

Funktionsvorschrift?

$$\Delta v^{(1)}(t) = v^{(1)}(t+\Delta t) - v^{(1)}(t)$$

$$\frac{\Delta v^{(1)}(t)}{\Delta t} = w \frac{u}{\|u\|_2}$$

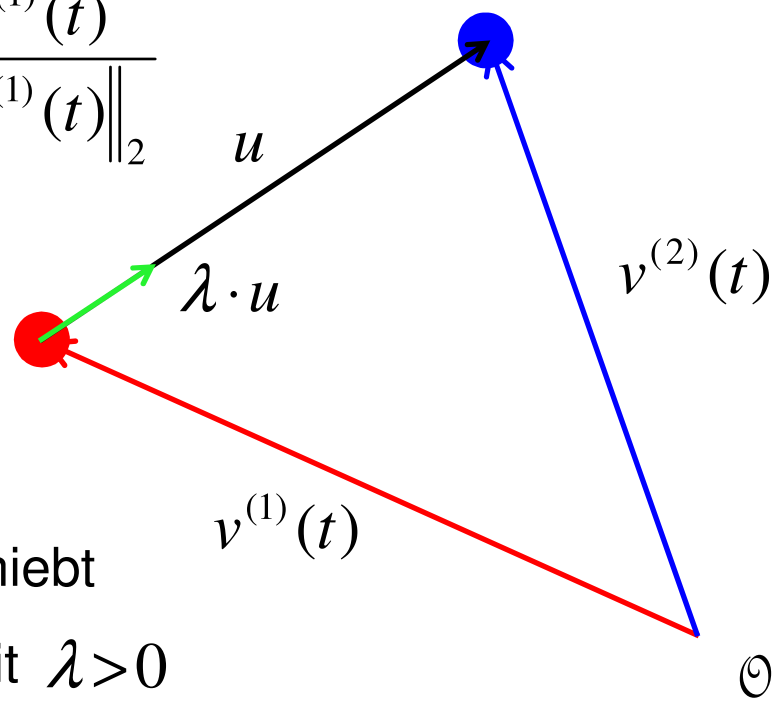


Idee: der rote Verfolger verschiebt

sich in der Zeit Δt um $\lambda \cdot u$ mit $\lambda > 0$

Funktionsvorschrift?

$$\frac{\Delta v^{(1)}(t)}{\Delta t} = w \frac{v^{(2)}(t) - v^{(1)}(t)}{\left\| v^{(2)}(t) - v^{(1)}(t) \right\|_2}$$



Idee: der rote Verfolger verschiebt sich in der Zeit Δt um $\lambda \cdot u$ mit $\lambda > 0$

Funktionsvorschrift?

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta v^{(1)}(t)}{\Delta t} &= w\frac{v^{(2)}(t)-v^{(1)}(t)}{\left\|v^{(2)}(t)-v^{(1)}(t)\right\|_2}\\
\frac{\Delta v^{(2)}(t)}{\Delta t} &= w\frac{v^{(3)}(t)-v^{(2)}(t)}{\left\|v^{(3)}(t)-v^{(2)}(t)\right\|_2}\\
\frac{\Delta v^{(3)}(t)}{\Delta t} &= w\frac{v^{(4)}(t)-v^{(3)}(t)}{\left\|v^{(4)}(t)-v^{(3)}(t)\right\|_2}\\
\frac{\Delta v^{(4)}(t)}{\Delta t} &= w\frac{v^{(1)}(t)-v^{(4)}(t)}{\left\|v^{(1)}(t)-v^{(4)}(t)\right\|_2}
\end{aligned}\right\}$$

$$x = \left(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}\right)$$

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = F(x(t))$$

$$F : \left(\mathbb{R}^2\right)^4 \to \left(\mathbb{R}^2\right)^4$$

Funktionsvorschrift?

$$t_0 = 0,\ t_1 = \Delta t,\ t_2 = 2\Delta t,\ t_3 = 3\Delta t, \ldots$$

$$\frac{\Delta x(t_k)}{\Delta t} = F(x(t_k))$$ bzw. $$\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\Delta t} = F(x(t_k))$$

$x(t_0) = x_0$ vorgegebene Startpositionen

$x(t_1) = x(t_0) + \Delta x(t_0) = x(t_0) + \Delta t \cdot F(x(t_0))$ erster Schritt

$x(t_2) = x(t_1) + \Delta x(t_1) = x(t_1) + \Delta t \cdot F(x(t_1))$ zweiter Schritt

typischer Fall einer rekursiven Definition

Erhöhung der Genauigkeit …

durch feineren Zeittakt $\Delta t = \frac{1}{10}$

oder besser $\Delta t = \frac{1}{100}$

oder besser $\Delta t = \frac{1}{1000}$

oder besser $\Delta t = \frac{1}{10000}$

oder besser ….

typischer Fall einer Zahlenfolge die gegen 0 strebt (konvergiert)

Erhöhung der Genauigkeit …

Nullfolge $\Delta t \to 0$ führt zu Folgen

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$ von Differenzenquotienten

bei Konvergenz spricht man von Differenzialquotienten

$$\frac{dx(t)}{dt}$$

und nennt die Grenzfunktion differenzierbar

Erhöhung der Genauigkeit …

Das Verfolgungsgesetz wird zur Differenzialgleichung

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t))$$

Die Lösung erfordert …

$$x(t_k) = x_0 + \Delta x(t_0) + \Delta x(t_1) + \cdots \Delta x(t_{k-1})$$

$$= x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta x(t_i) = x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\Delta x(t_i)}{\Delta t} \Delta t$$

$$\approx x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} F(x(t_i)) \Delta t \approx x_0 + \int_0^{t_k} F(x(\tau)) d\tau$$

Integral

Es ergibt sich das Mathematikprogramm:

1) Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

2) Vektorräume $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \left(\mathbb{R}^2\right)^4, \ldots$

3) Funktionen $F : D \to W$

4) Folgen $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \cdots$

5) Differentiation, Integration $\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \to \frac{dx(t)}{dt}$