Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 30.10.2009
Abgabe : 06.11.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Blatt 02

Aufgabe 1:

Für alle Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten die Vektorraumaxiome

- V1: $(x+y)+z = x+(y+z)$.
- V2: $x+0 = 0+x = x$.
- V3: Jede Gleichung der Art $x+z=y$ besitzt genau eine Lösung z.
- V4: $x+y = y+x$.
- V5: $(\lambda \cdot \mu)x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.
- V6: $1 \cdot x = x$.
- V7: $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
- V8: $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

Das Skalarprodukt besitzt die folgenden Eigenschaften

- S1: $x \cdot y = y \cdot x$.
- S2: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.
- S3: $x \cdot (\lambda y) = \lambda (x \cdot y)$.
- S4: $x \cdot x \geq 0$ und $x \cdot x = 0 \iff x = 0$.

Beweise sieben Aussagen aus $\mathcal{A} = \{$V1,...,V8,S1,...,S4$\}$, wobei die Auswahl durch Ziehen von Losen durchgeführt werden soll. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aussage V3 nicht bearbeitet wird, wenn 10 Aufgabenblätter abgegeben werden?

Aufgabe 2:

Gegeben ist die 'Mittelstufengerade' $g: \quad y = \sqrt{3}x - 1$ und die 'Oberstufengerade' $G: \quad \{(\sqrt{3}, -1) + \lambda(1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ im Koordinatensystem $(\mathcal{O}, \mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{U})$ mit Rechtsachse x und Hochachse y. Schreibe die 'Mittelstufengerade' in der Form der 'Oberstufengerade' und umgekehrt und bestimme den Schnittpunkt.

Aufgabe 3:

Das Dreieck ABC mit $A\ (-3,-3.5)$, $B\ (4,0.5)$ und $C\ (-3,1.5)$ wird auf die Gerade g mit $y=-\frac{1}{2}x$ projiziert.

(a) Schreibe g als 'Oberstufengerade'.

(b) Bestimme die Projektionspunkte zu A, B, C.

(c) Zeichne die Gerade g, das Dreieck ABC sowie die projizierte Figur.

(d) Bereche die Länge des Projektionsfigur.

Aufgabe 4:

Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion, die den folgenden Bedingungen genügt,

N1: $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$, und $\|x\| = 0$ genau dann wenn $x = 0$.

N2: $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

N3: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Dann heißt $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$.

Beweise $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ und $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ sind Normen auf $\mathbb{R}^2$. Markiere alle Punkte in der Ebene mit $\|x\|_1 \leq 1$ bzw. $\|x\|_\infty \leq 1$ (die sogenannten Einheitskugeln der Normen).

Aufgabe 5:

Gegeben ist der Punkt $A\ (0.3, \sqrt{3})$, berechne die Koordinaten seines Bildpunktes A' bei einer Drehung um den Winkel 30°. Ist es möglich, die Abbildung D_{30° der 30°-Drehung durch zwei geeignete Spiegelungen zu ersetzen? Wie sind die Spiegelachsen zu wählen?